

УДК 621.391.26

ОБРАБОТКА ОРТОГОНАЛЬНЫХ ЧАСТОТНО-УПЛОТНЕННЫХ СИГНАЛОВ, ПЕРЕДАВАЕМЫХ ПО КАНАЛАМ СВЯЗИ С ЗАМИРАНИЯМИ

В.П. ТУЗЛУКОВ

Белорусская государственная академия связи, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 26 апреля 2018

Аннотация. В работе проводится математический анализ вероятностных характеристик сигналов, передаваемых по уплотненным каналам связи с ортогональным частотным разделением при наличии замираний в канале связи, подчиняющихся закону распределения Накагами- m . В отличие от предыдущих исследований в настоящей работе рассматривается воздействие неоднородного распределения фазы замираний в канале связи на вероятность ошибок приема сигналов. Представлено унифицированное математическое выражение производящей функции моментов для коэффициентов замираний в канале связи в частотной области, распределенных в соответствии с законом Накагами- m с неоднородными распределениями фазы. Таким образом, классические методы определения производящей функции моментов могут непосредственно использоваться для определения точного математического представления вероятности ошибки приема сигналов при различных видах модуляции и разнесении сигналов.

Ключевые слова: канал связи с замираниями, ортогональное частотное уплотнение, вероятность ошибок, распределение Накагами- m .

Abstract. The mathematical analysis of the probabilistic characteristics of signals transmitted through compressed communication channels with orthogonal frequency separation in the presence of fading in the communication channel obeying the Nakagami- m distribution law is carried out in the paper. In contrast to previous studies, the effect of a non-uniform distribution of the fading phase in a communication channel on the probability of signal reception errors is examined. A unified mathematical expression of the generating function of moments is presented for the fading coefficients in the communication channel in the frequency domain, distributed in accordance with the Nakagami- m law with non-uniform phase distributions. Thus, the classical methods for determining the generating function of moments can be directly used to determine the exact mathematical representation of the probability of error receiving signals for various types of modulation and diversity of signals.

Keywords: communication channel with fading, orthogonal frequency multiplexing, error probability, Nakagami- m distribution.

Doklady BGUIR. 2019, Vol. 119, No. 1, pp. 11-18
Processing of orthogonal frequency-compensated signals
transmitted via communication channels with fading
V.P. Tuzlukov

Введение

Точные статистические модели для коэффициентов замирания в каналах связи в частотной области играют важную роль при анализе характеристик обнаружения мультиплексированных сигналов с ортогональным частотным разделением, передаваемых посредством частотно-избирательных каналов связи с замираниями. Предыдущие исследования характеристик обнаружения мультиплексированных сигналов с ортогональным частотным разделением, передаваемых посредством частотно-избирательных каналов связи

с замираниями, распределенными в соответствии с законом Накагами- m , основывались на следующих предположениях: 1) фазовые углы и амплитуды комплексных коэффициентов замираний канала связи являются независимыми случайными величинами; 2) фазовые углы являются равномерно распределенными случайными величинами. Несмотря на тот факт, что эти предположения широко используются, ясный физический или интуитивный базис для этих предположений отсутствует [1].

Распределение амплитуды замираний в канале связи в соответствии с законом Накагами- m широко используется благодаря эмпирическим подтверждениям совмещения с высокой точностью с данными измерения амплитуды замираний в канале связи [2–4]. Однако плотность распределения вероятностей фазы замираний в канале связи, коррелированная с распределением Накагами- m , не предусматривалась. В большинстве работ предполагалось равномерное распределение фазы замираний без каких-либо подтверждений. С другой стороны, было определено, что фаза комплексной случайной величины, подчиняющейся закону распределения Накагами- m , не может быть равномерно распределенной для всех значений m [5–11], и точные модели распределения фазы замираний в канале связи должны быть зависимыми от параметра замираний m . Так, при $m > 1$ замирания, распределенные в соответствии с законом Накагами- m , приближаются к замираниям, подчиняющимся закону распределения Райса, для которого, как известно, распределение фазы замираний не является однородным. Аналогично, если $m < 1$, плотность распределения вероятностей замираний стремится к распределению Хойта, для которого распределение фазы замираний также не является однородным [7]. Следовательно, анализ характеристик обнаружения мультиплексированных сигналов с ортогональным частотным распределением, передаваемых посредством канала связи с замираниями, распределенными в соответствии с законом Накагами- m с неоднородным распределением фазовых углов, представляет собой как теоретический, так и практический интерес [12–14].

Наиболее близкие результаты были получены в [15, 16]. В [15] была предложена аппроксимация коэффициента усиления канала связи с замираниями в частотной области другой случайной величиной, распределенной по закону Накагами- m , имеющей другой параметр замираний. Строгий анализ вероятности ошибок в случае равномерного распределения фазы замираний в канале связи был предложен в [16] при рассмотрении круговой симметрии случайных величин, распределенных в соответствии с законом Накагами- m , предполагая равномерное распределение фазы. По этой причине результаты, полученные в [16], не могут распространяться на модели с неравномерным распределением фазы замираний в канале связи.

Модель Накагами- m замираний

Оригинальная модель замираний в канале связи, соответствующая распределению Накагами- m [1], не определяет какое-либо распределение фазы замираний в канале связи. Однако благодаря равномерному распределению фазы при рэлеевских замираниях большинство исследователей произвольным образом установили, что при замираниях в канале связи, распределенных в соответствии с законом Накагами- m , фаза замираний распределена равномерно, и сделали предположение, что фазовый угол замираний независим от амплитуды замираний, без какого-либо убедительного физического или интуитивного обоснования.

С другой стороны, убедительная модель комплексных замираний Накагами основывается на следующем наблюдении: дробное или целое значение m может быть представлено в виде случайной величины, соответствующей распределению Накагами- m , как корень квадратный из суммы квадратов $2m$ независимых гауссовских случайных величин. Таким образом, если R есть комплексная случайная величина с амплитудой $|R|$, подчиняющаяся распределению Накагами- m с математическим ожиданием $\sqrt{\Omega}$, тогда

$$|R|^2 = \frac{\Omega}{2m} \sum_{i=1}^m |g_{c,i} + jg_{s,i}|^2, \quad (1)$$

где $g_{c,i}$ и $g_{s,i}$ – независимые гауссовские случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

С этой точки зрения следует отметить, что (1) широко используется при моделировании коррелированных случайных величин, подчиняющихся закону распределения Накагами- m [17–22]. Следовательно, убедительная и правдоподобная модель для комплексной случайной величины, распределенной в соответствии с законом Накагами- m , удовлетворяющей (1) при $m = 1, 2, \dots$, может быть представлена в виде [7–13]

$$R = \delta_1 \sqrt{\frac{\Omega}{2m}} X + j\delta_2 \sqrt{\frac{\Omega}{2m}} Y, \quad (2)$$

где δ_1, δ_2, X, Y – взаимно независимые случайные величины; δ_1 и δ_2 – равновероятные случайные величины, принимающие значения в пределах интервала $[-1, +1]$, а $X = \sum_{i=1}^m g_{c,i}^2$

и $Y = \sum_{i=1}^m g_{s,i}^2$ – случайные величины, распределенные в соответствии с χ^2 -распределением с m степенями свободы

$$f_X(x) = f_Y(x) = \frac{1}{2^{0,5m} \Gamma(0,5m)} x^{0,5m-1} \exp(-0,5x), \quad (3)$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция.

Знание того, что сумма двух идентичных и независимых гамма случайных величин с параметром $0,5m$ является также гамма случайной величиной, но с параметром m , предполагает, что уравнение, подобное (2), также может быть использовано для генерации комплексных случайных величин, подчиняющихся распределению Накагами- m при нецелочисленном m . Однако в этом случае X и Y становятся независимыми гамма случайными величинами с параметром $0,5m$. На основе модели, представленной в (2), в [7, 8] было получено следующее строгое математическое выражение для плотности распределения вероятностей фазового угла $\arg R$:

$$f_{\arg}(\varphi) = \frac{\Gamma(m)}{2^m \Gamma^2(0,5m)} |\sin 2\varphi|^2. \quad (4)$$

Математический анализ

Показатели качества приема и обработки мультиплексированных ортогональных сигналов с частотным разделением зависит от текущего значения отношения сигнал/помеха n -го канала $q_n = SNR |H_n|^2$, где SNR – среднее значение отношения сигнал/помеха; H_n – импульсная характеристика n -го канала в частотной области, $n = 0, 1, \dots, N-1$:

$$H_n = \sum_{l=0}^{L-1} R_l \exp\{-j2\pi(n/N)l\}, \quad (5)$$

где L – число многотрактовых маршрутов; N – общее число каналов связи. Здесь R_l , $l = 0, 1, \dots, L-1$ – независимые комплексные случайные величины, где $|R_l|$ – случайная величина, подчиняющаяся закону Накагами- m :

$$f_{|R_l|}(r) = \frac{2}{\Gamma(m)} (m/\Omega_l)^m r^{2m-1} \exp\{-r^2(m/2\Omega_l)\}, \quad m > 0,5 \quad (6)$$

где $\Omega_l = E[R_l^2]$ – мощность замираний по l -му маршруту канала связи; $\sum_{l=0}^{L-1} \Omega_l = 1$. Выражение (5) можно переписать в следующем виде:

$$H_n = \sum_{l=0}^{L-1} (\tilde{x}_l + j\tilde{y}_l), \quad (7)$$

$$\tilde{x}_l = |R_l| \cos[\arg R_l - 2\pi(n/N)l] = x_l \cos[2\pi(n/N)l] + y_l \sin[2\pi(n/N)l], \quad (8a)$$

$$\tilde{y}_l = |R_l| \sin[\arg R_l - 2\pi(n/N)l] = x_l \sin[2\pi(n/N)l] - y_l \cos[2\pi(n/N)l], \quad (8b)$$

$$x_l = |R_l| \cos(\arg R_l) \quad \text{и} \quad y_l = |R_l| \sin(\arg R_l). \quad (8c)$$

Заметим, что сдвинутый угол $[\arg R_l - 2\pi(n/N)l](\text{mod } 2\pi)$ не обладает таким же законом распределения, как и $\arg R_l$. Это противоположно тому, что $(\text{mod } 2\pi)$ является равномерно распределенной случайной величиной, которая сохраняет свое равномерное распределение при любых произвольных сдвигах [23–25]. Мощность, или квадрат амплитуды замираний в n -м канале связи, определяется как

$$|H_n|^2 = \left| \sum_{l=0}^{L-1} (\tilde{x}_l + j\tilde{y}_l) \right|^2 = \left(\sum_{l=0}^{L-1} \tilde{x}_l \right)^2 + \left(\sum_{l=0}^{L-1} \tilde{y}_l \right)^2. \quad (9)$$

Для получения строгого математического выражения в общем виде для производящей функции моментов $E\{\exp[-z |H_n|^2]\}$ напомним хорошо известное равенство

$$(1/\sqrt{\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\omega^2) d\omega = 1, \quad \text{что эквивалентно}$$

$$1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-(\omega + jR)^2\} d\omega, \quad \forall R. \quad (10)$$

Выражение (10) предполагает, что

$$\exp\{-R^2\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\omega^2) \exp(-2j\omega R) d\omega. \quad (11)$$

Пусть $R = \sqrt{z} \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{x}_l$. Тогда

$$\exp\left\{-z \left(\sum_{l=0}^{L-1} \tilde{x}_l \right)^2\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\omega^2) \exp\left[-2j\sqrt{z}\omega \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{x}_l\right] d\omega, \quad (12)$$

и получаем, что случайные величины $(\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{L-1})$ появляются только в линейной комбинации в степени экспоненты. Это значительно упрощает оценку требуемого математического ожидания в терминах характеристических функций. Поскольку в (9) рассматривается производящая функция моментов $|H_n|^2$, отметим, что в общем смысле \tilde{x}_l и \tilde{y}_l не являются независимыми. Из (12) получаем:

$$\exp\left\{-z \left(\sum_{l=0}^{L-1} \tilde{x}_l \right)^2\right\} \exp\left\{-z \left(\sum_{l=0}^{L-1} \tilde{y}_l \right)^2\right\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-(u^2 + v^2)\} \exp\left\{-2j\sqrt{z} \sum_{l=0}^{L-1} (u\tilde{x}_l + v\tilde{y}_l)\right\} dudv. \quad (13)$$

Определим математическое ожидание левой и правой части (13) и затем вынесем математическое ожидание за знак интегрирования, чтобы получить производящую функцию моментов квадратов амплитуды замираний от суммы комплексных случайных величин в виде характеристической функции их сумм:

$$\mathbf{E}\{\exp[-z |H_n|^2]\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-(u^2 + v^2)\} \prod_{l=0}^{L-1} \Phi_l(2\sqrt{z}u, 2\sqrt{z}v) dudv, \quad (14)$$

где

$$\Phi_l(u, v) = \mathbf{E}\{\exp[-j(u\tilde{x}_l + v\tilde{y}_l)]\} = \mathbf{E}\{\exp\{-jx_l[u \cos[2\pi(n/N)l] + v \sin[2\pi(n/N)l]]\} \exp\{-jy_l[u \sin[2\pi(n/N)l] - v \cos[2\pi(n/N)l]]\}\}. \quad (15)$$

В случае комплексной случайной величины, распределенной согласно закону Накагами- m , заданной в (2), получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\exp(-j\omega x_l)] &= \mathbf{E}[\exp(-j\omega y_l)] = \mathbf{E}\{\exp[-j\omega \delta_l \sqrt{X_l(\Omega_l/m)}]\} = \mathbf{E}[\cos(\omega \sqrt{X_l(\Omega_l/m)})] = \\ &= \int_0^{\infty} \cos(\omega \sqrt{x(\Omega_l/m)}) \frac{x^{0.5m-1} \exp(-0.5x)}{2^{0.5m} \Gamma(0.5m)} dx = {}_1F_1[0, 5m; 0.5; -\omega^2(\Omega_l/4m)]. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь мы воспользовались предположением, что вероятность $P(\delta_l = -1) = P(\delta_l = 1) = 0.5$, и, используя преобразование Куммера [26], получим искомый результат. Следовательно, (15) сводится к выражению

$$\Phi_l(u, v) = {}_1F_1\{0, 5m; 0, 5; -(\Omega_l/m)[u \cos[2\pi(n/N)l] + v \sin[2\pi(n/N)l]]^2\} \times \\ \times {}_1F_1\{0, 5m; 0, 5; -(\Omega_l/m)[u \sin 2\pi(n/N)l] - v \cos n[2\pi(n/N)l]]^2\}, \quad (17)$$

где ${}_1F_1(;;)$ – вырожденная гипергеометрическая функция. Выражение (14) совместно с (17) позволяет получить производящую функцию моментов квадрата амплитуды замираний в канале n , $n = 0, 1, \dots, N-1$, что можно значительно упростить для $n = 0, 0, 25N, 0, 5N, 0, 75N, \dots$, где (14) сводится к простому выражению

$$\mathbf{E}\{\exp[-z | H_n |^2]\} = \mathcal{M}^2(z, m) \quad (18)$$

и

$$\mathcal{M}(z, m) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp(-\omega^2) \prod_{l=0}^{L-1} {}_1F_1[0, 5m; 0, 5; -(\Omega_l/m)z\omega^2] d\omega. \quad (19)$$

Используя равенство из [16], можно получить строгое математическое выражение для (19) в терминах гипергеометрической функции нескольких переменных [26]:

$$\mathcal{M}(z, m) = F_A^{(L)}[0, 5; 0, 5m, \dots, 0, 5m; 0, 5, \dots, 0, 5; -(\Omega_0/m)z, \dots, -(\Omega_{L-1}/m)z]. \quad (20)$$

Кроме того, используя (20), (19) может быть выражено через многочлен Эрмита

$$\mathcal{M}(z, m) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^K \alpha_k \prod_{l=0}^{L-1} {}_1F_1[0, 5m; 0, 5; -(\Omega_l/m)z\beta_k^2] + \mathfrak{R}_K, \quad (21)$$

где β_k и α_k – выборочные точки и весовые коэффициенты многочлена Эрмита, табулированные в [27]; \mathfrak{R}_K – остаток, который очень мал по величине при больших значениях K . Следовательно, (21) упрощает численное оценивание $\mathcal{M}(z)$. Необходимо отметить, что (20) приведено только для того, чтобы выразить (19) в компактной форме в терминах гипергеометрической функции нескольких переменных. Этот прием очень распространен в литературе, например в [13]. Однако, поскольку рассматривается численное оценивание (19), будем использовать (21).

В предельном случае при $m \rightarrow \infty$ амплитуда замираний в канале связи становится постоянной $\sqrt{\Omega_l}$. Можно показать, что в этом случае (19) сводится к

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{M}(z, m) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp(-\omega^2) \prod_{l=0}^{L-1} \cos(\sqrt{2\Omega_l}z\omega) d\omega. \quad (22)$$

Необходимо подчеркнуть, что с этой точки зрения (14) представляет собой унифицированное выражение для производящей функции моментов, которая действительна для каналов связи с многолучевыми замираниями с произвольной моделью распределения амплитуды и фазы замираний. Например, в случае замираний в канале связи, распределенных по закону Накагами- m с равномерно распределенной фазой, из (14) можно получить [1]

$$\mathbf{E}\{\exp[-z | H_n |^2]\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \exp\{-(u^2 + v^2)\} \prod_{l=0}^{L-1} {}_1F_1[m; 1; -(\Omega_l/m)(u^2 + v^2)] dudv = \\ = \int_0^\infty \exp(-\omega) \prod_{l=0}^{L-1} {}_1F_1[m; 1; -(\Omega_l/m)z\omega] d\omega, \quad (23)$$

где последний интеграл является результатом использования преобразований $u = \sqrt{\omega} \cos \theta$ и $v = \sqrt{\omega} \sin \theta$.

В итоге получили, что производящая функция моментов мощности замираний в канале связи задается функцией $\mathcal{M}^2(z)$, где $\mathcal{M}(z)$ определена в (19)–(21). Точные математические выражения для вероятности ошибок при передаче различных типов сигналов по каналам связи легко определяются в терминах производящей функции моментов [28]. Например, средняя вероятность ошибок на бит (BER) в случае двоичной фазовой модуляции с порядком разнесения сигналов D и суммированием дифференциально взвешенных сигналов каждого канала определяется как [29]

$$BER = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \mathcal{M}^2 \left(\frac{SNR}{\sqrt{2} \sin \theta}, m \right) d\theta. \quad (24)$$

Необходимо отметить, что представленные здесь результаты используют специальную комплексную модель распределения Накагами- m , в то время как в [7] как вещественные, так и мнимые компоненты имеют идентичные параметры. Тем не менее это может быть легко применимо к более обобщенным комплексным моделям распределения Накагами- m , в которых вещественные и мнимые компоненты обладают неидентичными характеристиками, как это показано в [8, 9]. В этом случае (18) имеет вид

$$E\{\exp[-z | H_n |^2]\} = \mathcal{M}(z, m_x) \mathcal{M}(z, m_y), \quad (25)$$

где $\mathcal{M}(z, m)$ задается (19) и m_x, m_y – параметры вещественной и мнимой компоненты, соответственно.

Численные результаты

На рис. 1–4 представлено сравнение вероятности ошибок на бит BER при приеме мультиплексированных ортогональных сигналов с частотным разделением и двоичной фазовой модуляцией, передаваемых по каналам связи с замираниями, распределенными в соответствии с законом Накагами- m , как с равномерно распределенной фазой, так и с неравномерно распределенной фазой. Мы полагаем, что $m = 0,5N$. Следовательно, теоретические результаты определяются, используя (18) и (19). Результаты моделирования методом Монте-Карло представлены для подтверждения теоретических исследований. На рис. 1, 2 вероятность ошибок на бит BER представлена как функция от параметра замираний m в канале связи для 2 и 3 маршрутов многолучевого распространения. Можно заметить, что две кривые BER совпадают друг с другом при $m \leq 1$. Это предполагает, что BER становится нечувствительной к распределению фазы замираний при $m < 1$. С другой стороны, различие между BER увеличивается с увеличением значения параметра m . При $L = 2$ неравномерно распределенные фазы замираний приводят к более высоким значениям BER , в то время как при равномерно распределенных фазах замираний в канале связи более высокие значения BER наблюдаются при $L = 3$. Как следует из рис. 3, значение BER становится больше при неравномерном распределении фазы амплитуды замираний при четном значении L , в то время как равномерное распределение фазы замираний в канале связи приводит к большим значениям BER при нечетных L . Обе кривые BER сходятся к одному и тому же значению при $L > 8$. На основании предельной центральной теоремы комплексная огибающая амплитуды замираний в канале связи сходится к комплексной гауссовской случайной величине при $L \gg 1$ независимо от закона распределения фазы амплитуды замираний в канале связи и значения параметра замираний m . Рис. 3 демонстрирует, что при равномерно распределенной фазе амплитуды замираний кривые BER сходятся быстрее. На рис. 4 BER представлена как функция от SNR при $m = 3$ для порядка разнесения сигналов $N = 1, 2$. Видно, что различие между двумя кривыми BER увеличивается с ростом значений SNR . На рис. 1 представлено, что при $L = 2$ значение BER увеличивается с увеличением параметра замираний m , начиная с $m > 2$, в то время как рис. 2 демонстрирует, что при $L = 3$ значение BER уменьшается быстро с ростом параметра m при $m > 2$. В силу нелинейности поведения BER очень сложно дать интуитивное объяснение такому поведению. Следует отметить, что о подобном поведении BER сообщалось в [16].

На рис. 1, 2 также демонстрируется поведение BER при аппроксимации коэффициентов канала связи в частотной области другим распределением Накагами- m с параметрами замираний, представленными в [15]. В [16] также было показано, что эта аппроксимация не может заслуживать доверия в случае распределения Накагами- m с равномерно распределенной фазой амплитуды замираний. Рис. 1 и 2 подтверждают, что результаты в [16] также не заслуживают доверия в случае равномерно распределенной фазы амплитуды замираний в канале связи.

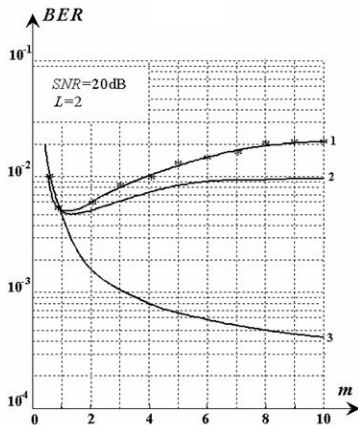


Рис. 1. Средняя вероятность ошибки как функция параметра замираний m . Накагами замирания при неоднородном (1) и однородном (2) распределении фазы; аппроксимация Накагами распределения (3); * – результаты моделирования

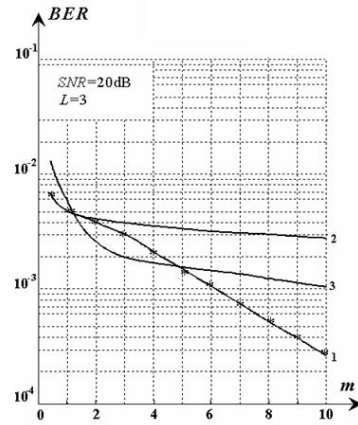


Рис. 2. Средняя вероятность ошибки как функция параметра замираний m . Накагами замирания при неоднородном (1) и однородном (2) распределении фазы; аппроксимация Накагами распределения (3); * – результаты моделирования

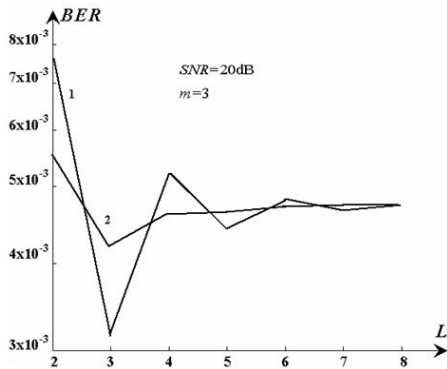


Рис. 3. Средняя вероятность ошибки как функция числа каналов L . Накагами замирания при неоднородном (1) и однородном (2) распределении фазы

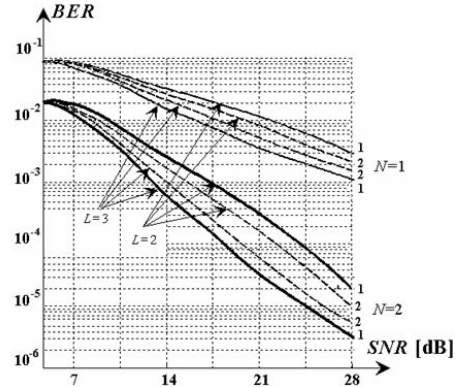


Рис. 4. Средняя вероятность ошибки как функция числа каналов L . Накагами замирания при неоднородном (1) и однородном (2) распределении фазы

Выводы

В настоящей работе исследовано воздействие неравномерно распределенной фазы амплитуды замираний в канале связи на BER при передаче мультиплексированных ортогональных сигналов с частотным разделением посредством частотно-избирательных каналов связи с замираниями, распределенными в соответствии с законом Накагами- m . Простой метод позволяет получить новое точное аналитическое выражение для производящей функции моментов мощности коэффициента усиления канала связи с замираниями в частотной области в виде характеристических функций комплексных коэффициентов усиления канала связи с многолучевым распространением. Классические методы могут использоваться для получения точных значений BER для различного вида модуляций и произвольного порядка разнесения сигналов при многоканальной связи.

Список литературы / References

1. Nakagami M. The m -distribution – a general formula of intensity distribution of rapid fading // Statistical Methods in Radio Wave Propagation. 1962. Vol. 40. P. 757–768.
2. Aulin A.T. Characteristics of a digital mobile radio channel // IEEE Transactions on Vehicle Technology. 1981. Vol. 30, No. 1. P. 45–53.
3. Charash U. Reception through Nakagami fading multipath channels with random delays // IEEE Transactions on Communications. 1979. Vol. 27, No. 4. P. 657–670.
4. Suzuki H. A statistical model for urban multipath // IEEE Transactions on Communications. 1977. Vol. 25, No. 7. P. 673–680.
5. Dwivedi V.K., Singh G. Error-rate analysis of the OFDM for correlated Nakagami- m fading channel

- by using maximal ratio combining diversity // *International Journal of Microwave and Wireless Technology*. 2011. Vol. 3, No. 6. P. 717–726.
6. Jain G., Dubey R. BER performance of OFDM system over Nakagami-m fading channels with different modulation schemes // *International Journal of Advanced Research in Computer Engineering & Technology (IJARCET)*. 2012. Vol. 1, No. 6. P. 111–116.
 7. Yacoub M.D., Fraidenraich G., Santos Filho J.C.S. Nakagami-m phase-envelope joint distribution // *IEEE Electronics Letters*. 2005. Vol. 41, No. 3. P. 259–261.
 8. Yacoub M.D. Nakagami-m phase-envelope joint distribution: a new model // *IEEE Transactions on Vehicle Technology*. 2010. Vol. 59, No. 3. P. 1552–1557.
 9. Mallik R.K. A new statistical model of the complex Nakagami-m fading channel // *IEEE Transactions on Communications*. 2010. Vol. 58, No. 9. P. 2611–2620.
 10. Sood N., Sharma A.K., Uddin M. On channel estimation of OFDM-BPSK and QPSK over Nakagami-m fading channels // *Signal Processing: An International Journal (SPIJ), Signal Processing: An International Journal (SPIJ)*. 2016. Vol. 4, No. 4. P. 239–246.
 11. Kumar I.H., Rao P.N.V. Efficiency BER analysis of OFDM system over Nakagami-m fading channel // *International Journal of Computer Engineering in Research Trends (IJCERT)*. 2015. Vol. 2, No.11. P. 745–750.
 12. Santos Filho J.C.S. On the second-order statistics of Nakagami fading simulators // *IEEE Transactions on Communications*. 2009. Vol. 57, No. 12. P. 3543–3546.
 13. Ma Y., Zhang D. A method for simulating complex Nakagami fading time series with nonuniform phase and prescribed autocorrelation characteristics // *IEEE Transactions on Vehicle Technology*. 2010. Vol. 59, No. 1. P. 29–35.
 14. Mishra M.K., Sood N., Sharma A.K. New BER analysis of OFDM system over Nakagami-n (Rice) fading channel // *International Journal of Computer Science, Engineering and Information Technology*. 2015. Vol. 2, No. 1. P. 745–750.
 15. Kang Z., Yao K., Lorenzelli F. Nakagami-m fading modeling in the frequency domain for OFDM system analysis // *IEEE Communications Letters*. 2003. Vol. 7, No. 10. P. 484–486.
 16. Du Z., Cheng J., Beaulieu N.C. Accurate error-rate performance analysis of OFDM on frequency-selective Nakagami-m fading channels // *IEEE Transactions on Communications*. 2006. Vol. 54, No. 2. P. 319–328.
 17. Tuzlukov V.P. *Signal detection theory*. New York: Springer-Verlag, 2001. 746 p.
 18. Luo J., Zeidler J.R., McLaughlin S. Performance analysis of compact antenna arrays with MRC in correlated Nakagami fading channels // *IEEE Transactions on Vehicle Technology*. 2001. Vol. 50, No. 1. P. 267–277.
 19. Polprasert C.A., Ritcey J.A. Nakagami fading phase difference distribution and its impact on BER performance // *IEEE Transactions on Wireless Communications*. 2008. Vol. 7, No. 7. P. 2805–2813.
 20. de Souza R.A.A., Yacoub M.D. Bivariate Nakagami-m distribution with arbitrary correlation and fading parameters // *IEEE Transactions on Wireless Communications*. 2008. Vol. 7, No. 12. P. 5227–5232.
 21. New results for the multivariate Nakagami-m fading model with arbitrary correlation matrix and applications / G.C. Alexandropoulos [et al.] // *IEEE Transactions on Wireless Communications*. 2009. Vol. 8, No. 1. P. 245–255.
 22. Reig J. Multivariate Nakagami-m distribution with constant correlation model // *AEU International Journal on Electronics and Communications*. 2009. Vol. 63, No. 1. P. 46–51.
 23. Tuzlukov V.P. *Signal processing in radar systems*. Boca Raton, London, New York, Washington DC, 2012. 632 p.
 24. Tuzlukov V.P. *Communications systems: new research*. New York: NOVA Science Publishers, Inc., 2013. 423 p.
 25. Tuzlukov V.P. *Contemporary issues in wireless communications*. Croatia: INTECH, 2014. P. 79–158.
 26. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. *Table of integrals, series, and products*. New York: Academic Press, 2000. 1167 p.
 27. Abramowitz M., Stegun I.A. *Handbook of mathematical functions*. Dover: National Bureau of Standards, 1964. 1064 p.
 28. Simon M.K., Alouini M.S. *Digital communications over fading channels*. New York: John Wiley-IEEE Press, 2004. 936 p.
 29. Tuzlukov V.P. *Advances in communications and media research*. Chapter 6: Detection of spatially distributed signals by generalized receiver using radar sensor array in wireless communication. New York: NOVA Science Publishers, Inc., 2015. P. 143–173.

Сведения об авторе

Тузлуков В.П., д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры инфокоммуникационных технологий Белорусской государственной академии связи.

Адрес для корреспонденции

220114, Республика Беларусь,
г. Минск, ул. Ф. Скорины 8/2
Белорусская государственная академия связи
тел. +375-44-549-35-17;
e-mail: slava.tuzlukov@mail.ru
Тузлуков Вячеслав Петрович

Information about the author

Tuzlukov V.P., D.Sci, professor, professor of information and communications department of Belarussian state academy of communications.

Address for correspondence

220013, Republic of Belarus,
Minsk, F. Scorina st., 8/2
Belarussian state academy of communications
tel. +375-44-549-35-17;
e-mail: slava.tuzlukov@mail.ru
Tuzlukov Vyacheslav Petrovich