Путят В.А., Иванов М.В., Гурвич Ю.А.
Белорусский национальный технический университет

Приведение систем дифференциальных уравнений движения управляемых колес к форме Коши

Задачу об устойчивости движения управляемых колес сводится к изучению решения системы дифференциальных уравнений:

$$
\begin{aligned}
&J_1\ddot\psi + h_1\dot\psi + (c_1+\eta_1)\psi - \gamma_0 J\ddot\theta - c_0 v\dot\theta - \gamma_0\eta_1\theta + \eta\xi = 0;\\
&J_2\ddot\theta + h_2\dot\theta + c_2\theta - \gamma_0 J\ddot\psi + c_0 v\dot\psi - \gamma_0\eta_1\psi - \gamma_0\eta\xi - 2b\varphi = 0;\\
&\dot\xi - r\dot\psi + \gamma_0 r\dot\theta + v\theta + v\varphi = 0;\\
&\dot\theta + \dot\varphi - \alpha v\xi + \beta v\varphi + \gamma v\psi - \gamma_0\gamma v\theta = 0
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Для приведения системы уравнений (1) к форме Коши введем обозначения:

$$x_1=\theta;\quad x_2=\varphi;\quad x_3=\xi;\quad x_4=\psi;\quad x_5=\dot\theta;\quad x_6=\dot\psi \qquad (2)$$

Коэффициенты системы уравнений (1) обозначим через $k_{ij},\ i=\overline{1,4};\ j=\overline{1,8}$ в соответствии с таблицей 1:

Таблица 1

Значения коэффициентов k_{ij}

j / i	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$-\gamma_0\eta_1$	0	η	$c_1+\eta_1$	$-c_0v$	h_1	$-\gamma_0 J$	J_1
2	c_2	-2b	$-\gamma_0\eta$	$-\gamma_0\eta_1$	h_2	c_0v	J_2	$-\gamma_0 J$
3	v	v	0	0	$\gamma_0 r$	- r	1	
4	$-\gamma_0\gamma$ v	β v	$-\alpha$ v	γ v	1	0	1	

Учитывая (2) и обозначения из таблицы 1, получаем систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&k_{11}x_1 + k_{12}x_2 + k_{13}x_3 + k_{14}x_4 + k_{15}x_5 + k_{16}x_6 + k_{17}\dot x_5 + k_{18}\dot x_6 = 0,\\
&k_{21}x_1 + k_{22}x_2 + k_{23}x_3 + k_{24}x_4 + k_{25}x_5 + k_{26}x_6 + k_{27}\dot x_5 + k_{28}\dot x_6 = 0,\\
&k_{31}x_1 + k_{32}x_2 + k_{33}x_3 + k_{34}x_4 + k_{35}x_5 + k_{36}x_6 + k_{37}\dot x_3 = 0,\\
&k_{41}x_1 + k_{42}x_2 + k_{43}x_3 + k_{44}x_4 + k_{45}x_5 + k_{46}x_6 + k_{47}\dot x_2 = 0
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

Из первого уравнения системы (3) получаем:

$$\dot x_6 = a_{17}\dot x_5 + \sum_{j=1}^{6} a_{1j}x_j\ , \qquad (4)$$

где коэффициенты a_{1j} вычисляются из соотношений:

$$a_{1j} = -\frac{k_{1j}}{k_{18}},\ j=\overline{1,6};\quad a_{17} = -\frac{k_{17}}{k_{18}}. \qquad (5)$$

Из второго уравнения системы (3) получаем:

$$\dot{x}_5 = a_{27}\dot{x}_6 + \sum_{j=1}^{6} a_{2j} x_j \ , \qquad (6)$$

где коэффициенты a_{2j} вычисляются из соотношений:

$$a_{2j} = -\frac{k_{2j}}{k_{27}}, \ j = \overline{1,6}; \qquad a_{27} = -\frac{k_{28}}{k_{27}} \qquad (7)$$

Из (4) и (6) получаем:

$$\dot{x}_5 = \frac{\sum_{j=1}^{6}\left(a_{2j} + a_{27}a_{1j}\right)x_j}{1 - a_{27}a_{17}} \ . \qquad (8)$$

Обозначим

$$b_{2j} = \frac{a_{2j} + a_{27}a_{1j}}{1 - a_{27}a_{17}},$$

$$b_{1j} = a_{1j} + a_{17}b_{2j}, \qquad j = \overline{1,6}. \qquad (9)$$

Окончательно получаем систему уравнений (3) в форме Коши:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_5, \\ \dot{x}_2 = -\sum_{j=1}^{6} k_{4j} x_j, \\ \dot{x}_3 = -\sum_{j=1}^{6} k_{3j} x_j, \\ \dot{x}_4 = x_6, \\ \dot{x}_5 = \sum_{j=1}^{6} b_{2j} x_j, \\ \dot{x}_6 = \sum_{j=1}^{6} b_{1j} x_j. \end{cases} \qquad (10)$$