

Предпосылки к созданию методики определения кинематических и силовых параметров вращения тел с переменным моментом инерции

Гурвич Ю.А., Шумилов А.А., АТФ, Климовский Р.Н. – студенты АТФ
Белорусский национальный технический университет

Установим механико-математические закономерности вращения фигуриста вокруг оси Z в предположении, что конек вырезает лунку, а момент сопротивления конька о лед $M_c \neq 0$ (Рис.1). I_1, I_2 – моменты инерции фигуриста относительно оси Z с расставленными в стороны и прижатыми к туловищу руками соответственно; $\omega_1 = \omega_{t=0}$ – начальная угловая скорость, соответствующая I_1 ; ω_2 – угловая скорость, соответствующая I_2 .

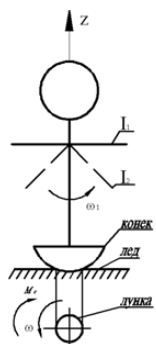


Рис. 1 Схема вращения фигуриста вокруг оси Z

Определим угловую скорость вращения фигуриста относительно оси Z в функции времени $\omega = \omega(t)$ при условии, что: момент инерции фигуриста относительно оси Z является переменным; суммарный момент сопротивления воздуха вращающемуся фигуристу и его коньку о лед, пропорционален угловой скорости вращения $M_c = \alpha\omega$ (вязкое трение); суммарные силы инерции Кориолиса при движении рук фигуриста в вертикальной и горизонтальной плоскостях равны нулю.

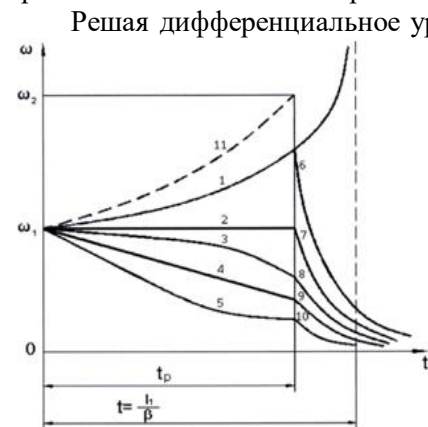


Рис. 2. Зависимость угловой скорости вращения при вязком трении

Решая дифференциальное уравнение вращения фигуриста с разделяющимися переменными, получим:

$$\omega = \omega_1 \frac{I_1}{I(t)} e^{-\alpha \int_{01}^t dt},$$

где t – время вращения фигуриста равно сумме времени разгона и торможения – $t_b = t_p + t_T$; $I(t) = I_1 - \beta t$; $\beta = (I_1 - I_2)/t_p$; $I_1 = I_{t=0}$; $I_2 = I_{t=t_p}$.

На рис.2 1 – $\alpha/\beta < 1$ (ω возрастает); 2-5 – $\alpha/\beta \geq 1$ (ω убывает); 6-10 – экспоненты, при $t > t_p$; 11 – гипербола (тривиальный случай, когда конек касается льда одной точкой: $M_c = 0, I_2 = \text{const}$).

Определение характеристик вращения тел с переменным моментом инерции при различных видах сопротивления

Гурвич Ю.А., Кислова Т.Е.– студентка ФИТР
Белорусский национальный технический университет

Дифференциальное уравнение вращения фигуриста при одновременном действии сухого и вязкого трения ($M_c = -M_{тр} - \alpha\omega$) имеет вид:

$$(I_1 - \beta t) \frac{d\omega}{dt} - \omega(\alpha - \beta) = -M_{тр}. \quad (1)$$

Общее решение уравнения (1):

$$\omega = I_1^{(1-\frac{\alpha}{\beta})} (I_1 - \beta t)^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \left(\omega_1 + \frac{M_{тр}}{\alpha-\beta} \right) - \frac{M_{тр}}{\alpha-\beta}. \quad (2)$$

Решение (2) справедливо только для двух случаев $\frac{\alpha}{\beta} < 1$ и $\frac{\alpha}{\beta} > 1$.

Решение уравнения (1) для случая $\alpha = \beta$ представлено в виде:

$$\omega = \omega_1 + \frac{M_{тр}}{\beta} \ln \frac{I_1 - \beta t}{I_1}. \quad (3)$$

На рис.1 показаны графики функций (2) для случаев: $1 - \frac{\alpha}{\beta} < 1, \omega_1 >$

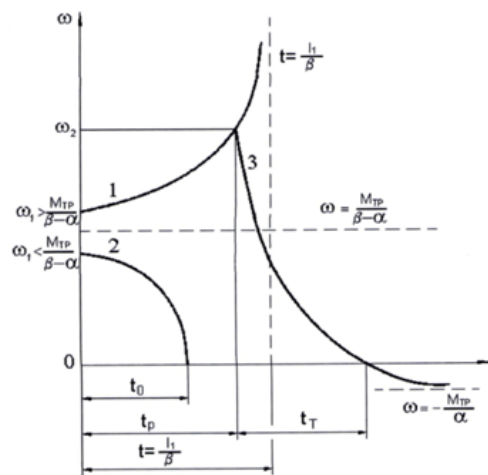


Рис. 1. Зависимость угловой скорости вращения фигуриста при вязком и сухом трении

$\frac{M_{тр}}{\beta-\alpha}$ (наиболее интересный для зрителей и судей случай); $2 - \frac{\alpha}{\beta} < 1, \omega_1 < \frac{M_{тр}}{\beta-\alpha}$. В случаях $\alpha = \beta, \frac{\alpha}{\beta} > 1$ угловая скорость ω убывает (эти случаи на рис.1 не показаны).

При $I = I_2 = \text{const} (t > t_p)$ для случая $\frac{\alpha}{\beta} < 1$ и $\omega_1 > \frac{M_{тр}}{\beta-\alpha}$ угловая скорость ω имеет вид:

$$\omega = e^{-\frac{\alpha}{I_2} \left(\frac{M_{тр}}{\alpha} + \omega_2 \right) t} - \frac{M_{тр}}{\alpha}.$$

Определим время торможения t_T при $\omega = 0$:

$$t_T = \frac{I_2}{\alpha} \ln \frac{\frac{M_{тр}}{\alpha} + \omega_2}{\frac{M_{тр}}{\alpha}}.$$