Белорусский национальный технический университет, Минск

НЕКОТОРЫЕ УТОЧНЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ АРТИЛЛЕРИЙСКОГО СНАРЯДА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Крайник Д.А., Горбач Н.И., Гурвич Ю.А.

В отличие от работы [1] в данной статье приведены уточнения: методики определения дальности полета артиллерийского снаряда; угла α, при котором дальность полета является максимальной и значения двух углов, когда снаряд попадает в одну и ту же точку.

Определение траектории полета снаряда [1–7]. В работе [1] рассматривалось движение снаряда весом P, которому сообщена начальная скорость V_0 под углом α к горизонту, с учетом силы сопротивления воздуха $\overline{R} = -kP\overline{V}$.

Движение снаряда в декартовых осях *XOY* определялось уравнениями:

$$x = \frac{V_0\cos(\alpha)}{kg}\left(1 - e^{-kgt}\right). \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{kg}\left(\frac{1}{k} + V_0\sin(\alpha)\right)\left(1 - e^{-kgt}\right) - \frac{t}{k}. \quad (2)$$

Исключим из этих уравнений время *t*. В результате получим уравнение траектории в координатной форме

$$y = xtg(\alpha) + \frac{x}{kV_0\cos(\alpha)} + \frac{1}{k^2g}\ln\left(1 - \frac{kgx}{V_0\cos(\alpha)}\right). \quad (3)$$

Преобразуем уравнение (3). Сначала разложим выражение $\ln\left(1 - \frac{kgx}{V_0\cos(\alpha)}\right)$ в ряд Тейлора, имеющий вид:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{I}(x_0)}{1!}x + \frac{f^{II}(x_0)}{2!}x^2 + \frac{f^{III}(x_0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{n}(x_0)}{1n!}x^n.$$

Обозначим $\ln\left(1 - \frac{kgx}{V_0\cos(\alpha)}\right) = f(x)$ и вычислим первые пять производных от этой функции при $x_0 = 0$:

$$f^{I}(x) = -\frac{kg}{V_0\cos(\alpha) - kgx}\bigg|_{x_0} = 0 = -\frac{kg}{V_0\cos(\alpha)};$$

$$f^{II}(x) = -\left(\frac{kg}{V_0\cos(\alpha) - kgx}\right)^2\bigg|_{x_0} = 0 = -\left(\frac{kg}{V_0\cos(\alpha)}\right)^2;$$

$$f^{III}(x) = -2\left(\frac{kg}{V_0\cos(\alpha) - kgx}\right)^3\bigg|_{x_0} = 0 = -2\left(\frac{kg}{V_0\cos(\alpha)}\right)^3;$$

$$f^{IV}(x) = -6\left(\frac{kg}{V_0\cos(\alpha) - kgx}\right)^4\bigg|_{x_0} = 0 = -6\left(\frac{kg}{V_0\cos(\alpha)}\right)^4;$$

$$f^{V}(x) = -24\left(\frac{kg}{V_0\cos(\alpha) - kgx}\right)^5\bigg|_{x_0} = 0 = -24\left(\frac{kg}{V_0\cos(\alpha)}\right)^5.$$

Затем значения производных функции $f(x)$ подставим в ряд Тейлора:

$$f(x) = 0 - \frac{kgx}{V_0\cos(\alpha)} - \frac{1}{2}\left(\frac{kgx}{V_0\cos(\alpha)}\right)^2 - \frac{2}{6}\left(\frac{kgx}{V_0\cos(\alpha)}\right)^3 - \frac{6}{24}\left(\frac{kgx}{V_0\cos(\alpha)}\right)^4 - \frac{24}{120}\left(\frac{kgx}{V_0\cos(\alpha)}\right)^5. \quad (4)$$

Первые шесть слагаемых ряда Тейлора подставим в уравнение (3). В итоге получим приближенное уравнение траектории полета снаряда:

$$y = xtg(\alpha) - \frac{gx^2}{2V_0^{\,2}\cos^2(\alpha)} - \frac{kg^2x^3}{3V_0^{\,3}\cos^3(\alpha)} - \frac{k^2g^3x^4}{4V_0^{\,4}\cos^4(\alpha)} - \frac{k^3g^4x^5}{5V_0^{\,5}\cos^5(\alpha)}. \quad (5)$$

Уравнение (5) можно представить в виде:

$$y = xtg(\alpha) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^{n-1} g^n x^{n+1}}{(n+1) V_0^{\,n+1} cos^{n+1}(\alpha)},$$
(6)

что позволяет определять уравнение траектории полета снаряда при любом числе слагаемых ряда Тейлора.

Сравнивая уравнение (5) с известным уравнением траектории полета снаряда в безвоздушном пространстве [1], видим, что первые два слагаемых полностью совпадают, т.е. на начальном участке восходящая ветвь траектории близка к параболе, а с увеличением x нисходящая ветвь принимает форму отличную от параболы.

В работе [1] учитывались только четыре первых слагаемых ряда Тейлора, что позволило без двух последних слагаемых уравнения (5) при $y = 0$ получить формулу для определения дальности L полета снаряда.

$$L = \frac{3}{4}\frac{V_0 \cos(\alpha)}{kg}\left(\sqrt{1 + \frac{16}{3} k V_0 \sin(\alpha)} - 1\right)$$
(7)

Как показали дальнейшие исследования и расчеты дальность полета снаряда, определенная по этой формуле, весьма завышена. Это говорит о том, что нельзя ограничиваться в разложении функции $f(x)$ только первыми тремя производными.

Более того, дальность полета не может превышать значение $x = \frac{V_0 \cos(\alpha)}{kg}$, так как $\ln 0$ или отрицательного числа не существует. Поэтому дальность полета в метрах должна быть:

$$x < \frac{V_0 \cos(\alpha)}{kg} = \frac{800 * \cos(34.2)}{0.004 * 9.81} = 16862.$$

Определение угла α, при котором дальность *S* полета снаряда будет максимальной

Значение S определяем по формуле (8) [1] при $V_0 = 800 \frac{м}{с}$, $k = 0.004 \frac{с}{м}$ и различных углах α от $5°$ до $85°$ с шагом $h = 5°$. Результаты вычислений на ЭВМ приведены в таблицах 1 и 2.

$$S_{max} = \frac{V_0^{\,2} \sin(2\alpha)}{2g(kV_0 \sin(\alpha) + 1)}.$$
(8)

Таблица 1

Начальная скорость V_0=800 м/с						
α, град	**5°**	**10°**	**15°**	**20°**	**25°**	**30°**
S_{max}	4433,62	7178,88	8930,28	10021,2	10633,4	10876,3
α, град	**35°**	**40°**	**45°**	**50°**	**55°**	**60°**
S_{max}	10821,5	10519,4	10007,9	9317,24	8473,19	7498,35
α, град	**65°**	**70°**	**75°**	**80°**	**85°**	
S_{max}	6413,46	5238,06	3990,88	2690,19	1353,96	

Из таблицы 1 видим, что при начальной скорости V_0 = 800 м/с максимальная дальность полета будет при угле α, находящимся в диапазоне 30°…35°.

Для более точного определения угла α построим новую таблицу, изменяя угол наклона ствола орудия к горизонту от 30° до 33,7° с шагом h = 0,1°.

Таблица 2

$\alpha_{опт}$	S_{max}	$\alpha_{опт}$	S_{max}	$\alpha_{опт}$	S_{max}	$\alpha_{опт}$	S_{max}
30	10876,3	**31**	10887,32	**32**	10886,94	**33**	10875,59
30,1	10877,93	**31,1**	10887,78	**32,1**	10886,29	**33,1**	10873,87
30,2	10879,44	**31,2**	10888,14	**32,2**	10885,53	**33,2**	10872,04
30,3	10880,83	**31,3**	10888,38	**32,3**	10884,67	**33,3**	10870,1
30,4	10882,1	**31,4**	10888,51	**32,4**	10883,69	**33,4**	10868,07
30,5	10883,26	**31,5**	10888,53	**32,5**	10882,61	**33,5**	10865,92
30,6	10884,3	**31,6**	10888,43	**32,6**	10881,42	**33,6**	10863,68
30,7	10885,23	**31,7**	10888,22	**32,7**	10880,12	**33,7**	10861,33

Анализ таблицы 2 показал, что при $\alpha_{опт} = 31{,}5°$ $S_{max} = 10888{,}53$ м.

В работе [1] этот угол определялся так же с использованием формулы (8). Исследовав это выражение на экстремум, было получено кубическое уравнение относительно угла α, которое было решено с помощью формулы Кардана [3]. Значение угла α, при котором $S = S_{max}$ при $k = 0{,}004$ с/м, $V_0 = 800$м/с, оказалось равным 34,2°, т.е. на 2,7° больше, чем получено нами.

Разницу этих значений можно объяснить тем, что при использовании формулы Кардана допускались некоторые неточности в вычислениях из-за округлений

Сравнение траектории полета снаряда, вычисленной по приближенному уравнению, с траекторией, полученной по точному уравнению

Для этого построим четыре траектории полета снаряда при оптимальном угле $\alpha_{опт} = 31{,}5°$ (рисунок 1). Первые три траектории вычислим по приближенному уравнению (6), а четвертую − по точному уравнению (3):

- <u>траектория 1</u> – вычисляется по приближенному уравнению, при $n = \overline{1{,}2}$;
- <u>траектория 2</u> – вычисляется по приближенному уравнению, при $n = \overline{1{,}3}$;
- <u>траектория 3</u> – вычисляется по приближенному уравнению, при $n = \overline{1{,}4}$;
- <u>траектория 4</u> – вычисляется по точному уравнению.

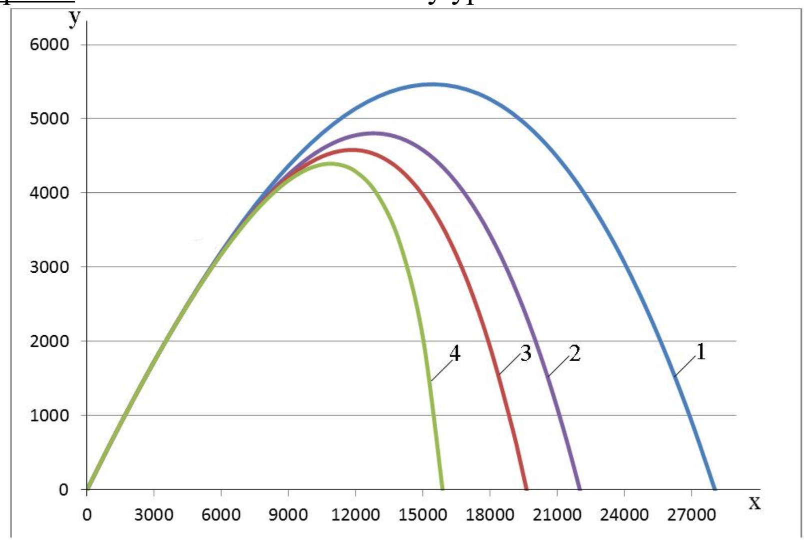

Рисунок 1

Из рисунка 1 видно, что при увеличении числа членов производной от функции $f(x)$, точность определения дальности полета снаряда будет стремиться к значениям, полученным из уравнения (3).

Определение времени t полета снаряда

Более точно определить дальность полета снаряда можно, зная время его движения по траектории.

Для определения времени полета снаряда необходимо уравнение (2) решить графически, положив $y = 0$, а $\alpha = \alpha_{опт} = 31{,}5°$. В этом случае уравнение распадается на два уравнения: $y_1 = \frac{t}{k}$; $y_2 = \frac{1}{kg}\left(\frac{1}{k} + V_0 \sin(\alpha)\right)(1 - e^{-kgt})$.

Вычисления y_1 и y_2 приведены в таблице 3.

Таблица 3

$t_{полн}$, с	0	10	20	30	40	50	60	70
y_1, м	0	2500	5000	7500	10000	12500	15000	17500
y_2, м	0	5526,257	9260,372	11783,53	13488,44	14640,45	15418,87	15944,85

Используя таблицу 3, построим графики $y_1(t)$ – линия 1, а $y_2(t)$ – линия 2 (рисунок 2).

Точка пересечения этих линий определяет время движения снаряда от момента выстрела до момента падения, т.е. когда y=0. Для более точного определения всего времени полета снаряда построим новую таблицу значений (табл. 4), в которой возьмем время от 60 до 63 секунд и определим его из условия, что $y_1 = y_2$.

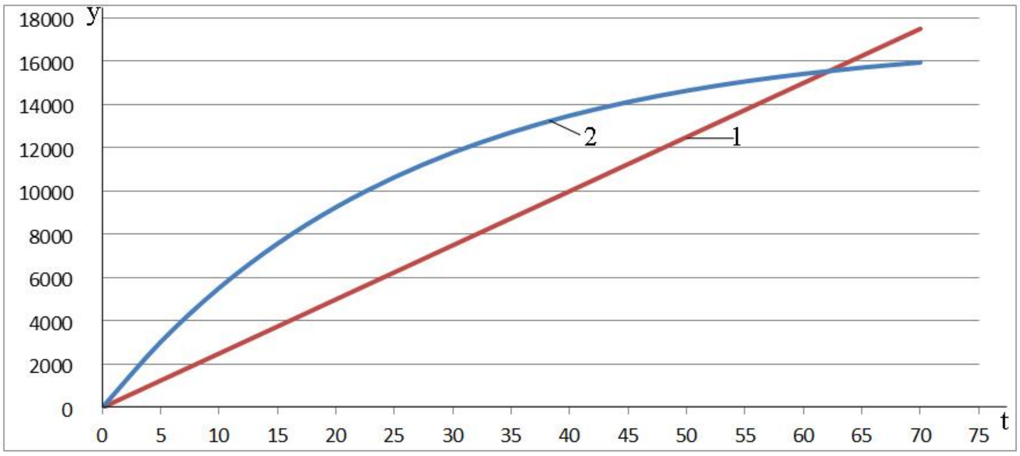

Рисунок 2

Таблица 4

$t_{полн}$, с	y_1, м	y_2, м	$t_{полн}$, с	y_1, м	y_2, м	$t_{полн}$, с	y_1, м	y_2, м
60	15000	15418,87	**61**	15250	15481,22	**62**	15500	15541,17
60,1	15025	15425,21	**61,1**	15275	15487,32	**62,1**	15525	15547,04
60,2	15050	15431,53	**61,2**	15300	15493,4	**62,2**	15550	15552,88
60,3	15075	15437,83	**61,3**	15325	15499,45	**62,3**	15575	15558,7
60,4	15100	15444,1	**61,4**	15350	15505,48	**62,4**	15600	15564,5
60,5	15125	15450,35	**61,5**	15375	15511,49	**62,5**	15625	15570,28
60,6	15150	15456,57	**61,6**	15400	15517,47	**62,6**	15650	15576,03
60,7	15175	15462,77	**61,7**	15425	15523,43	**62,7**	15675	15581,76
60,8	15200	15468,94	**61,8**	15450	15529,37	**62,8**	15700	15587,47
60,9	15225	15475,09	**61,9**	15475	15535,28	**62,9**	15725	15593,15

Из таблицы 4 видно, что $y_1 = y_2$, в момент времени $\boldsymbol{t_{пол} = 62,2}$ **с.**

Определение дальности полета снаряда *L*

Для того чтобы определить дальность полета снаряда, необходимо подставить в уравнение (1) данные $\alpha_{опт} = 31{,}5°$ и $t_{полн} = 62{,}2с$.

$$L = {}^{x}/_{t} = t_{пол} = \frac{V_0 \cos(\alpha)}{kg}\left(1 - e^{-kgt}\right) = \frac{800 \cdot \cos(31{,}5)}{0{,}004 \cdot 9{,}8}\left(1 - e^{-0{,}004 \cdot 9{,}8 \cdot 62{,}2}\right) = 15881{,}84 \text{ м.}$$

Определение двух различных углов, при которых снаряд попадет в одну точку.

Определим значение таких двух углов, при которых снаряд попадает примерно в одну и ту же точку, с величиной рассевания 10 метров. Для этого построим таблицу 5 только при одной скорости $V_0 = 800$ м/с и разными углами от $6°$ до $85°$ с шагом $1°$. Подчеркнем, что при каждом значении угла от 6º до 85º время полета снаряда определялось по методике, описанной в подразделе «Определение времени t полета снаряда».

Таблица 5

α	L	α	L	α	L	α	L
6	9230,578	26	16104,94	46	13562,11	66	8113,71
7	10175,38	27	16097,65	47	13339,61	67	7798,484
8	11007,4	28	16072,2	48	13110,49	68	7480,273
9	11739,42	29	16031,23	49	12875,21	69	7159,278
10	12394,62	30	15974,92	50	12633,98	70	6835,576
11	12957,59	31	15904,78	51	12387,02	71	6509,308
12	13460,12	32	15809,95	52	12134,36	72	6180,659
13	13829,54	33	15725,24	53	11876,38	73	5849,757
14	14288,22	34	15616,67	54	11613,12	74	5516,687
15	14626,72	35	15496,92	55	11344,93	75	5181,584
16	14918,3	36	15366,51	56	11071,98	76	4844,616
17	15172,42	37	15225,49	57	10794,31	77	4505,529
18	15387,14	38	15074,78	58	10512,22	78	4165,524
19	15570,35	39	14914,8	59	10225,77	79	3823,657
20	15721,56	40	14745,58	60	9935,231	80	3480,429
21	15844,62	41	14567,88	61	9642,087	81	3135,941
22	15941,57	42	14382,03	62	9342,399	82	2790,321
23	15967,46	43	14188,07	63	9040,325	83	2443,715
24	16065,48	44	13986,61	64	8734,772	84	2096,23
25	16095,51	45	13777,95	65	8425,877	85	1747,994

Анализ таблицы 5 показал, что существует три пары двух углов, при которых снаряд попадает в одну и ту же точку, разную для каждой пары, при углах:

$\alpha_{11} = 16°$, а $\alpha_{12} = 39°$ - траектории 1 и 6;

$\alpha_{21} = 20°$, а $\alpha_{22} = 33°$ - траектории 2 и 5;

$\alpha_{31} = 24°$, а $\alpha_{32} = 28°$ - траектории 3 и 4.

Построим траектории полета снаряда с учетом сопротивления воздуха, используя полученные углы (рис. 3).

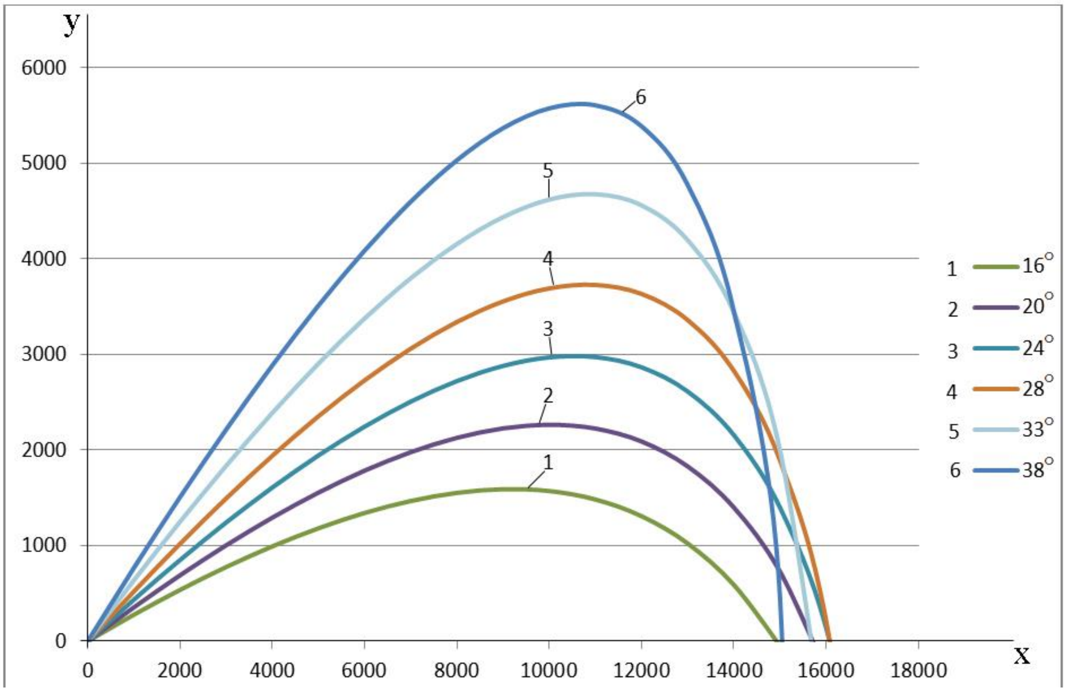

Рисунок 3

Заключение. Показано, что с увеличением числа членов разложения выражения $\ln\left(1 - \frac{kgx}{V_0 \cos(\alpha)}\right)$ в ряд Тейлора, увеличивается точность определения дальности полета снаряда.

В работе [1] учитывается четыре первых члена ряда Тейлора, что является грубым допущением и дальность полета снаряда, определенная по приближенному уравнению больше примерно на 12 000м дальности, вычисленной при тех же условиях по точному уравнению.

Оптимальный угол наклона ствола орудия при выстреле более точно определен в данной работе и отличается от $\alpha_{опт}$, определенного в работе [1] на 2,7° в меньшую сторону, т.е. $\alpha_{опт}$=31,5° вместо $\alpha_{опт}$=34,2°.

Полученные данные, характеризующие движения снаряда, являются приблизительными, так как значение коэффициент сопротивления принято ориентировочно.

ЛИТЕРАТУРА

1 К вопросу о движении артиллерийского снаряда / Амельянчик А.И., Горбач Н.И. // Международный научно-технический журнал / БНТУ. – М.: 2009. – Выпуск 24: Теоретическая и прикладная механика. – С. 247–260.
2 Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. - М.: ООО «Издательство Астрель» АСТ, 2002. - 992 с: ил.
3 Справочник по высшей математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бранштейн, К.А. Семендяев. - М.: Наука, 1984.
4 Яблонский, АА. Курс теоретической механики: учебник для техн. вузов / А.А. Яблонский. - 6-е изд. испр. - М.: Высш. шк., 1984-423 е.: ил.
5 Мещерский, И.В. Сборник задач по теоретической механике / И.В. Мещерский. - М.: «Наука», 1981. - 480 с.
6 Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. М.: Высшая школа, 1955. – 416 с.
7 Наставление по стрелковому делу. Воениздат, 1985, Москва, К-160, редактор В.М. Чайка.