

Вращение тел с переменным моментом инерции при различных видах сопротивления

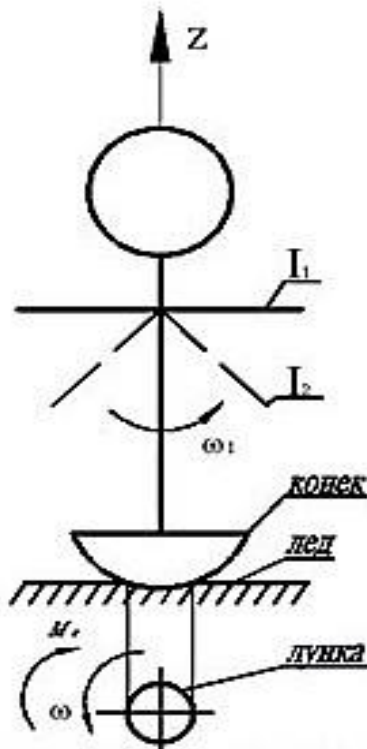


Рисунок 1 — Схема вращения

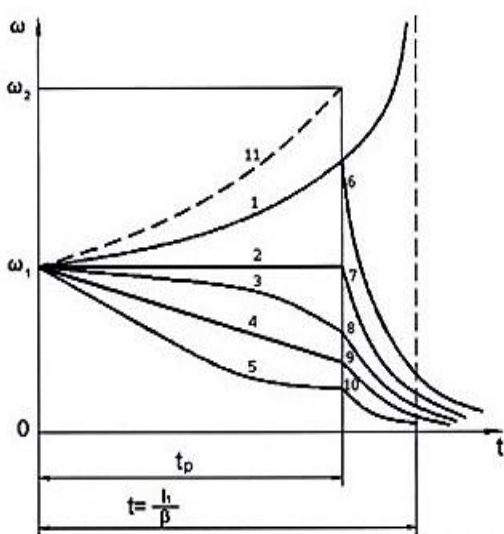


Рисунок 2 — Зависимость угловой скорости вращения при вязком трении

В технике довольно часто встречаются тела, механизмы и машины, обладающие переменными моментами инерции: регулятор Уатта, механизм сцепления, самолет с изменяемой геометрией крыла и т. д. Рассмотрим вращение фигуриста вокруг вертикальной оси, представляющего собой тело с переменным моментом инерции. В книге [3], приведено тривиальное решение задачи об изменении угловой скорости фигуриста, выполняющего пируэт «Винт» при условии сохранения постоянным его кинетического момента относительно оси вращения – $I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$. Отсюда $\omega_2 > \omega_1$, так как $I_1 > I_2$.

Установим механико-математические закономерности вращения фигуриста вокруг оси Z в предположении, что конек вырезает лунку, а момент сопротивления конька о лед $M_c \neq 0$ (Рисунок 1). I_1 , I_2 – моменты инерции фигуриста относительно оси Z с расставленными в стороны и прижатыми к туловищу руками соответственно; $\omega_1 = \omega_{t=0}$ – начальная угловая скорость, соответствующая I_1 ; ω_2 – угловая скорость, соответствующая I_2 . Определим

угловую скорость вращения фигуриста относительно оси Z в функции времени $\omega = \omega(t)$ при условии, что: момент инерции фигуриста относительно оси Z является переменным; суммарный момент сопротивления воздуха вращающемуся фигуристу и его коньку о лед, пропорционален угловой скорости вращения $M_c = -\alpha\omega$ (вязкое трение); суммарные силы инерции Кориолиса при движении рук фигуриста в вертикальной и горизонтальной плоскостях равны нулю. Решая дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными вращения фигуриста [1...6], получим:

$$\omega = \omega_1 \frac{I_1}{I(t)} e^{-\alpha \int_0^t \frac{dt}{I(t)}}$$

где – время вращения фигуриста равно сумме времени разгона и торможения – $t_b = t_p + t_r$; $I(t) = I_1 - \beta t$; $\beta = (I_1 - I_2)/t_p$; $I_1 = I_{t=0}$; $I_2 = I_{t=t_p}$. На рисунке 2 1 – $\alpha/\beta < 1$ (ω возрастает); 2-5 – $\alpha/\beta \geq 1$ (ω убывает); 6-10 – экспоненты, при $t > t_p$; 11 – ω – гипербола

(тривиальный случай, когда конек касается льда одной точкой: $M_c = 0, I_2 = \text{const}$).

Теперь рассмотрим закономерности вращения фигуриста при одновременном действии момента сухого и вязкого трения. Дифференциальное уравнение вращения фигуриста при одновременном действии сухого и вязкого трения ($M_c = -M_{\text{тр}} - \alpha\omega$) имеет вид:

$$(I_1 - \beta t) \frac{d\omega}{dt} + \omega(\alpha - \beta) = -M_{\text{тр}}. \quad (1)$$

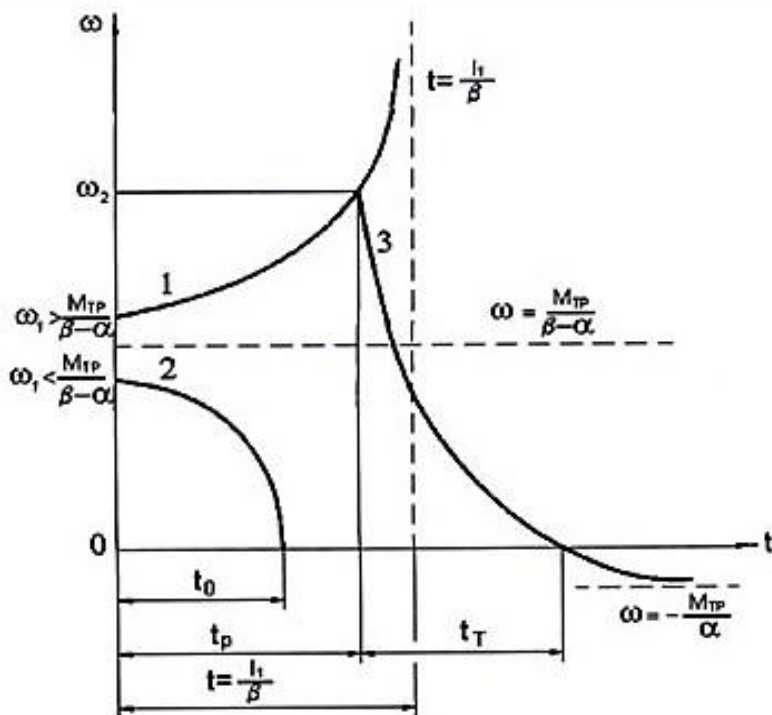
Общее решение уравнения (1):

$$\omega = I_1^{(1-\frac{\alpha}{\beta})} (I_1 - \beta t)^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \left(\omega_1 + \frac{M_{\text{тр}}}{\alpha-\beta} \right) - \frac{M_{\text{тр}}}{\alpha-\beta}. \quad (2)$$

Решение (2) справедливо только для двух случаев $\frac{\alpha}{\beta} < 1$ и $\frac{\alpha}{\beta} > 1$.

Решение уравнения (1) для случая $\alpha = \beta$ представлено в виде:

$$\omega = \omega_1 + \frac{M_{\text{тр}}}{\beta} \ln \frac{I_1 - \beta t}{I_1}. \quad (3)$$



На рисунке 3 показаны графики функций (2) для случаев: 1 — $1 - \frac{\alpha}{\beta} < 1$,

$\omega_1 > \frac{M_{\text{тр}}}{\beta - \alpha}$ (наиболее интересный для зрителей случай); 2 — $\frac{\alpha}{\beta} < 1$,

$\omega_1 < \frac{M_{\text{тр}}}{\beta - \alpha}$. В случаях $\alpha = \beta$, $\frac{\alpha}{\beta} > 1$ угловая скорость ω убывает (эти случаи на рис.3 не показаны).

При $I = I_2 = \text{const}$ ($t > t_p$) для случая

$\frac{\alpha}{\beta} < 1$ и $\omega_1 > \frac{M_{\text{тр}}}{\beta - \alpha}$ угловая скорость ω имеет вид:

угловая скорость ω имеет вид:

$$\omega = e^{-\frac{\alpha}{I_2} t} \left(\frac{M_{\text{тр}}}{\alpha} + \omega_2 \right) - \frac{M_{\text{тр}}}{\alpha}.$$

Определим время торможения t_T при $\omega = 0$:

$$t_T = \frac{I_2}{\alpha} \ln \frac{\frac{M_{\text{тр}}}{\alpha} + \omega_2}{\frac{M_{\text{тр}}}{\alpha}}.$$

Рисунок 3 — Зависимость угловой скорости вращения при вязком и сухом трении

ЛИТЕРАТУРА

1. Пановко, Я. Г. Основы прикладной теории упругих колебаний / Я. Г. Пановко. — М.: Машиностроение, 1967. — 316 с.
2. Бесекерский, В. А. Теория систем автоматического регулирования / В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. — М.: Наука, 1975. — 768 с.
3. Мишин, А. И. Биомеханика движений фигуриста / А. И. Мишин. — М.: Физкультура и спорт, 1981.
4. Меркин, Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения / Д. Р. Меркин. — М.: Наука, 1976. — 320 с.
5. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики / А. А. Яблонский. — М.: Наука, 1966. — 411 с.
6. Чертов, А. Г. Задачник по физике / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. — М.: Высш. Школа, 1981. — 496 с.