

ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕМАТИКИ ДВУХШАРНИРНОЙ КАРДАННОЙ ПЕРЕДАЧИ С ПОМОЩЬЮ КОРРЕЛЯЦИОННО- РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА

Гурвич Ю.А., Вареник А.А., Августиневич А.Г., Старовойтова О.Л.

Белорусский национальный технический университет, Минск

This article contains a description of a new method of unevenness definition in dependence of obliquity angle and its influence on output cinematic characteristics of two-joint cardan shafts. Also conducted a study of cardan shafts using correlation-regression analysis.

В отличие от работ [1-7] здесь впервые сделана попытка исследовать влияние угла поворота α ведущего вала I, угла излома γ_2 и угла между вилками ψ , расположенными на одном валу II, на угловое ускорение ε_3 ведомого вала III двухшарнирной карданной передачи, схема которой представлена на рис.1, с помощью корреляционно-регрессионного анализа и программного пакета STATISTICA.

Корреляционно-регрессионный анализ широко используется при исследовании различных зависимостей между статистическими рядами. В зависимости от количества рассматриваемых факторов корреляционно-регрессионный анализ подразделяется на два вида: парный и множественный. Парный корреляционно-регрессионный анализ устанавливает связь между двумя факторами: $y_i = x_i$; многофакторный – между n факторами, один из которых – зависимый, а остальные – независимые: $y_i = f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ [8-10].

При изучении кинематики плоской двухшарнирной карданной передачи сначала был проведён парный, а затем многофакторный корреляционно-регрессионный анализ.

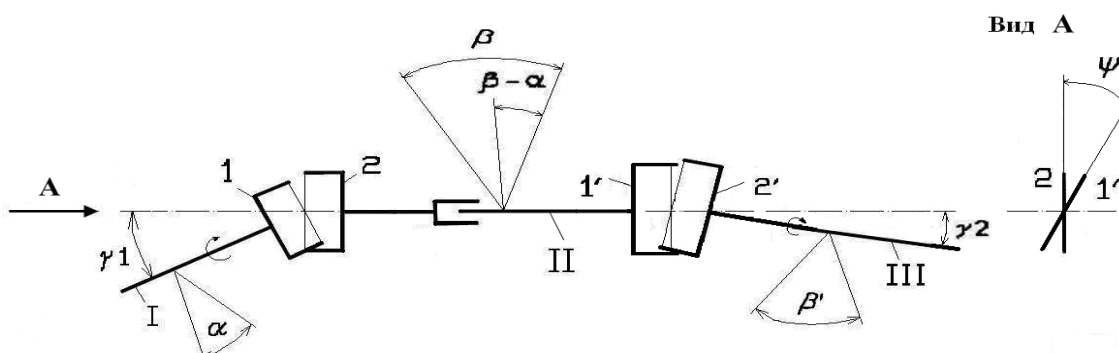


Рис. 1. Схема плоской двухшарнирной карданной передачи с двумя карданами

Для определения углового ускорения ε_3 вала III двухшарнирной карданной передачи в качестве исходной информации используем формулу угла поворота ведомого вала β' , приведенную в [2]:

$$\beta' = \arctan \left(\frac{\cos \gamma_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \psi)}{\cos \gamma_1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \psi + \cos^2 \gamma_2 \cdot \operatorname{tg} \psi (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \psi \cdot \cos \gamma_1)} \right), \quad (1)$$

где α – угол поворота вала I; β' – угол поворота вала III; γ_1 – угол излома вала I; γ_2 – угол излома вала III; ψ – угол между вилками 2 и 1', расположенными на валу II.

Сначала определим угловую скорость ведомого вала. Так как угол β' является функцией двух переменных α, γ_2 , то полная первая производная по времени от (1) представляет собой сумму двух слагаемых

$$\frac{d\beta'}{dt} = \frac{\partial\beta'}{\partial\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial\beta'}{\partial\gamma_2} \cdot \frac{d\gamma_2}{dt}.$$

Введем замены:

$$L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) = \frac{\partial\beta'}{\partial\alpha}, \quad L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) = \frac{\partial\beta'}{\partial\gamma_2}, \quad \omega_3 = \frac{d\beta'}{dt} \quad - \text{угловая скорость}$$

вращения вала III; $\omega_1 = \frac{d\alpha}{dt}$ – угловая скорость вала I; $\omega_{\gamma_2} = \frac{d\gamma_2}{dt}$ – угловая скорость вала III при переменном угле γ_2 .

Выражение (1) перепишем в виде

$$\omega_3 = \omega_1 \cdot L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) + \omega_{\gamma_2} \cdot L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi). \quad (2)$$

Теперь определим угловое ускорение ведомого вала ε_3 , взяв полную производную по времени от левой и правой частей выражения (2) (в [7] приведен вывод формулы ε_3):

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \varepsilon_1 \cdot L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) + \omega_1 \cdot \left(\frac{\partial L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)}{\partial\alpha} \cdot \omega_1 + \frac{\partial L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)}{\partial\gamma_2} \cdot \omega_{\gamma_2} \right) + \\ + \varepsilon_{\gamma_2} \cdot L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) + \omega_{\gamma_2} \cdot \left(\frac{\partial L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)}{\partial\alpha} \cdot \omega_1 + \frac{\partial L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)}{\partial\gamma_2} \cdot \omega_{\gamma_2} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где ε_1 – угловое ускорение вала I; ε_{γ_2} – угловое ускорение вала III при переменном угле γ_2 .

В работе исследование углового ускорения $\ddot{\beta}' = \varepsilon_3$ с помощью парного корреляционно-регрессионного анализа было выполнено при переменных углах:

1. α (при фиксированных углах γ_1, γ_2, ψ). Примем, например, $\gamma_1 = \pi/36$, $\gamma_2 = \pi/36$, $\psi = \pi/90$;
2. γ_1 (при фиксированных углах α, γ_2, ψ). Примем, например, $\alpha = \pi/6$, $\gamma_2 = \pi/36$, $\psi = \pi/90$;
3. γ_2 (при фиксированных углах α, γ_1, ψ). Примем, например, $\alpha = \pi/6$, $\gamma_1 = \pi/36$, $\psi = \pi/90$;
4. ψ (при фиксированных углах $\alpha, \gamma_1, \gamma_2$). Примем, например, $\alpha = \pi/6$, $\gamma_1 = \pi/36$, $\gamma_2 = \pi/36$.

Значения углов $\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi$ и углового ускорения $\ddot{\beta}'$ в функции этих углов или $\ddot{\beta}' = \ddot{\beta}'(\alpha)$, $\ddot{\beta}' = \ddot{\beta}'(\gamma_1)$, $\ddot{\beta}' = \ddot{\beta}'(\gamma_2)$, $\ddot{\beta}' = \ddot{\beta}'(\psi)$ определим по формуле (3), используя программный пакет MATHCAD (рис. 2). Тогда в обозначениях MATHCAD:

- $\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi$ (рад);
- $\ddot{\beta}'(\alpha) = b2\alpha$, $\ddot{\beta}'(\gamma_1) = b2\gamma_1$, $\ddot{\beta}'(\gamma_2) = b2\gamma_2$, $\ddot{\beta}'(\psi) = b2\psi$ (рад/с²).

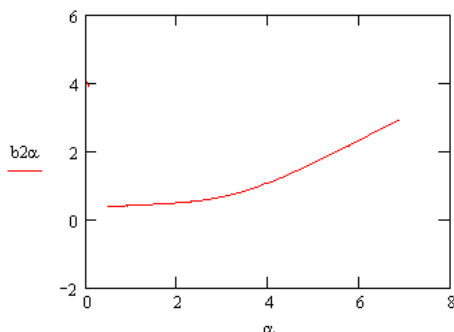
В столбце исходных данных угол α принимает значения $91\pi/180$ и $271\pi/180$, вместо $\alpha = 90\pi/180$ и $\alpha = 270\pi/180$, так как $\operatorname{tg}\alpha$, входящий в формулу ε_3 [7], при значениях этих углов стремится к $\pm \infty$.

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ \pi/6 \\ \pi/3 \\ 91\pi/180 \\ 2\pi/3 \\ \pi \\ 5\pi/4 \\ 271\pi/180 \\ 7\pi/4 \\ 2\pi \end{bmatrix}, \quad b2\alpha = \begin{bmatrix} 4.002 \\ 2.422 \\ -0.577 \\ -1.99 \\ -0.414 \\ 4.002 \\ 0.91 \\ -1.99 \\ 1.097 \\ 4.002 \end{bmatrix};$$

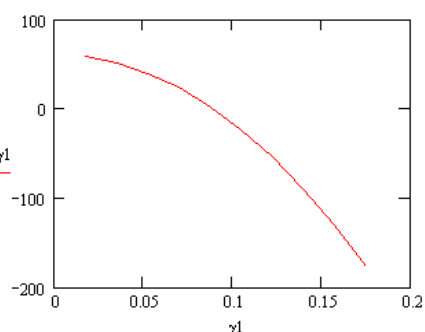
$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} \pi/180 \\ 2\pi/180 \\ 3\pi/180 \\ 4\pi/180 \\ 5\pi/180 \\ 6\pi/180 \\ 7\pi/180 \\ 8\pi/180 \\ 9\pi/180 \\ 10\pi/180 \end{bmatrix}, \quad b2\gamma_1 = \begin{bmatrix} 58.543 \\ 51.558 \\ 39.897 \\ 23.532 \\ 2.422 \\ -23.483 \\ -54.249 \\ -89.951 \\ -130.675 \\ -176.523 \end{bmatrix};$$

$$\gamma_2 = \begin{bmatrix} \pi/180 \\ 2\pi/180 \\ 3\pi/180 \\ 4\pi/180 \\ 5\pi/180 \\ 6\pi/180 \\ 7\pi/180 \\ 8\pi/180 \\ 9\pi/180 \\ 10\pi/180 \end{bmatrix}, \quad b2\gamma_2 = \begin{bmatrix} -55.592 \\ -48.406 \\ -36.332 \\ -19.384 \\ 2.422 \\ 29.064 \\ 60.514 \\ 96.74 \\ 137.702 \\ 183.359 \end{bmatrix};$$

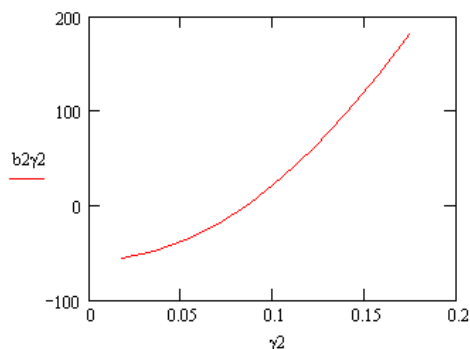
$$\psi = \begin{bmatrix} \pi/360 \\ \pi/180 \\ 3\pi/360 \\ 2\pi/180 \\ 5\pi/360 \\ 3\pi/180 \\ 7\pi/360 \\ 4\pi/180 \\ 9\pi/360 \\ 5\pi/180 \end{bmatrix}, \quad b2\psi = \begin{bmatrix} 0.703 \\ 1.294 \\ 1.867 \\ 2.422 \\ 2.96 \\ 3.478 \\ 3.979 \\ 4.46 \\ 4.923 \\ 5.367 \end{bmatrix}.$$



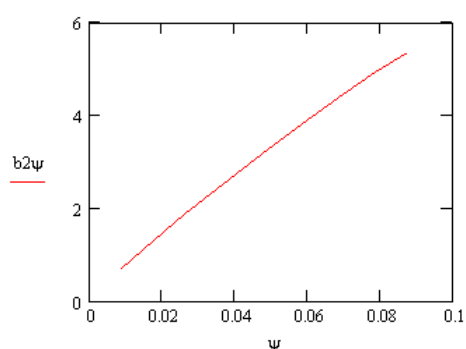
a)



б)



в)



з)

Рис. 2. Графики зависимости углового ускорения от углов α , γ_1 , γ_2 , ψ :

a) $\ddot{\beta}' = \ddot{\beta}'(\alpha)$, б) $\ddot{\beta}' = \ddot{\beta}'(\gamma_1)$, в) $\ddot{\beta}' = \ddot{\beta}'(\gamma_2)$, з) $\ddot{\beta}' = \ddot{\beta}'(\psi)$

Из графика, представленного на рис. 2, видно, что зависимость между угловым ускорением $\ddot{\beta}'$ и углом α близка к параболической; между $\ddot{\beta}'$ и углом γ_1 близка к гиперболической; между $\ddot{\beta}'$ и углом γ_2 близка к параболической; между $\ddot{\beta}'$ и углом ψ близка к линейной. Поэтому при выводе формулы парной регрессии с помощью программного пакета STATISTICA будем использовать параболическую, гиперболическую и линейную функции.

Итоги регрессии для зависимой переменной: b2 (Таблица д)						
R= ,51420124 R2= ,26440292 Скорректир. R2= ,05423232 F(2,7)=1,2580 p<,34138 Станд. ошибка оценки: 2,3202						
N=10	БЕТА	Стд.Ош. БЕТА	В	Стд.Ош. В	t(7)	p-уров.
Св.член			2,839761	1,695868	1,67452	0,137940
alfa	-1,87221	1,245710	-0,035869	0,023866	-1,50293	0,176561
V1**2	1,97214	1,245710	0,000103	0,000065	1,58314	0,157405

Итоги регрессии для зависимой переменной: b2 (Таблица д)						
R= ,99200825 R2= ,98408038 Скорректир. R2= ,97953191 F(2,7)=216,35 p<,00000 Станд. ошибка оценки: 11,596						
N=10	БЕТА	Стд.Ош. БЕТА	В	Стд.Ош. В	t(7)	p-уров.
Св.член			179,9129	18,38532	9,7867	0,000026
gamma1	-1,23608	0,081060	-33,0901	2,16999	-15,2490	0,000001
1/V1	-0,32481	0,081060	-94,9492	23,89563	-4,0070	0,005144

Итоги регрессии для зависимой переменной: b2 (Таблица д)						
R= ,99999946 R2= ,99999893 Скорректир. R2= ,99999862 F(2,7)=3258E3 p<,0,0000 Станд. ошибка оценки: ,09701						
N=10	БЕТА	Стд.Ош. БЕТА	В	Стд.Ош. В	t(7)	p-уров.
Св.член			-58,2040	0,114103	-510,102	0,000000
V1**2	0,996473	0,001748	2,4070	0,004222	570,116	0,000000
gamma2	0,003619	0,001748	0,0987	0,047654	2,070	0,077184

Итоги регрессии для зависимой переменной: b2 (Таблица д)						
R= ,99899418 R2= ,99798938 Скорректир. R2= ,99773805 F(1,8)=3970,9 p<,00000 Станд. ошибка оценки: ,07472						
N=10	БЕТА	Стд.Ош. БЕТА	В	Стд.Ош. В	t(8)	p-уров.
Св.член			0,294200	0,051043	5,76375	0,000422
psi	0,998994	0,015853	1,036764	0,016453	63,01480	0,000000

Рис. 3. Результаты парной регрессии для углов α , γ_1 , γ_2 , ψ

Из рис. 3 видно, что зависимости $\ddot{\beta}'$ от углов α , γ_1 , γ_2 , ψ выражаются моделями:

$$\begin{aligned} \ddot{\beta}' &= 2.839761 - 0.0358 \cdot \alpha^2 - 0.000103 \cdot \alpha; \\ \ddot{\beta}' &= 179.9129 - 33.0901 \cdot \gamma_1 - 94.9492 \cdot 1/\gamma_1; \\ \ddot{\beta}' &= -58.2040 + 2.4070 \cdot \gamma_2^2 + 0.0987 \cdot \gamma_2; \\ \ddot{\beta}' &= 0.2942 + 1.036764 \cdot \psi. \end{aligned}$$

Применим многофакторный корреляционно-регрессионный анализ для установления одновременной функциональной зависимости между исследуемой случайной величиной и факторами $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ или $\ddot{\beta}' = \ddot{\beta}'(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)$.

На стадии количественного анализа отберем факторы, влияние которых на исследуемую зависимость $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ существенно. В уравнении множественной регрессии существенными обычно оказываются те факторы, которые имеют существенную корреляционную связь с результативным признаком, т. е. с $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (большое значение коэффициента корреляции), а между собой – несущественную (малое значение коэффициента корреляции). На данной стадии рассчитывается корреляционная матрица (табл. 1):

Таблица 1

	y	x ₁	x ₂	...	x _n
y	1	r _{yx1}	r _{yx2}	...	r _{yxn}
x ₁		1	r _{x1x2}	...	r _{x1xn}
x ₂			1	...	r _{x2xn}
x ₃				...	r _{x3xn}
⋮					⋮
x _n					1

Коэффициент корреляции между факторами x_i и x_j определяется по формуле:

$$r_{x_i x_j} = \frac{\sum_{k=1}^n [(x_{ik} - \bar{x}_i) \cdot (x_{jk} - \bar{x}_j)]}{\sqrt{\sum_{k=1}^n [(x_{ik} - \bar{x}_i)^2 \cdot (x_{jk} - \bar{x}_j)^2]}}, \quad (4)$$

где \bar{x}_i и \bar{x}_j - соответственно, среднее по строкам и столбцам.

В нашем случае корреляционная матрица между углами α , γ_1 , γ_2 , ψ и угловым ускорением $\varepsilon_3 = \ddot{\beta}'$ примет следующий вид

$$Matriz_a = \begin{bmatrix} 1 & r_{\varepsilon_3 \alpha} & r_{\varepsilon_3 \gamma_1} & r_{\varepsilon_3 \gamma_2} & r_{\varepsilon_3 \psi} \\ r_{\varepsilon_3 \alpha} & 1 & r_{\alpha \gamma_1} & r_{\alpha \gamma_2} & r_{\alpha \psi} \\ r_{\varepsilon_3 \gamma_1} & r_{\alpha \gamma_1} & 1 & r_{\gamma_2 \gamma_1} & r_{\psi \gamma_1} \\ r_{\varepsilon_3 \gamma_2} & r_{\alpha \gamma_2} & r_{\gamma_2 \gamma_1} & 1 & r_{\gamma_2 \psi} \\ r_{\varepsilon_3 \psi} & r_{\alpha \psi} & r_{\psi \gamma_1} & r_{\gamma_2 \psi} & 1 \end{bmatrix},$$

$$Matriz_a = \begin{bmatrix} 1 & 0.032 & -0.973 & 0.975 & 0.999 \\ 0.032 & 1 & 0.955 & 0.965 & 0.995 \\ -0.973 & 0.955 & 1 & 1 & 0.02 \\ 0.975 & 0.965 & 1 & 1 & 1 \\ 0.999 & 0.995 & 0.02 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Из матрицы видно, что коэффициент корреляции:

- между $\ddot{\beta}'$ и α равен 0.032;
- между $\ddot{\beta}'$ и γ_1 равен -0.973;
- между $\ddot{\beta}'$ и γ_2 равен 0.975;
- между $\ddot{\beta}'$ и ψ равен 0.999.

Для фактора α (матрицу рассматриваем по столбцам) связь с фактором γ_1 сильнее, чем с функцией $\ddot{\beta}'$, потому что $r_{\alpha \gamma_1} = 0.955 > r_{\varepsilon_3 \alpha} = 0.032$. Следовательно, фактор α является несущественным и его нужно исключить из дальнейшего рассмотрения.

Исходные данные $\ddot{\beta}'$ для множественной корреляции получим из формулы (3) по 29-ти значениям углов γ_1 , γ_2 , ψ (в градусах):

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 1 \\ 1.5 \\ 2 \\ 2.5 \\ 3 \\ 3.5 \\ 4 \\ 4.5 \\ 5 \\ 5.5 \\ 6 \\ 6.5 \\ 7 \\ 7.5 \\ 8 \\ 8.5 \\ 9 \\ 9.5 \\ 10 \\ 10.5 \\ 11 \\ 11.5 \\ 12 \\ 12.5 \\ 13 \\ 13.5 \\ 14 \end{bmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 1.5 \\ 1.75 \\ 2 \\ 2.25 \\ 2.5 \\ 2.75 \\ 3 \\ 3.25 \\ 3.5 \\ 3.75 \\ 4 \\ 4.25 \\ 4.5 \\ 4.75 \\ 5 \\ 5.25 \\ 5.5 \\ 5.75 \\ 6 \\ 6.25 \\ 6.5 \\ 6.75 \\ 7 \\ 7.25 \\ 7.5 \\ 7.75 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \psi = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.8 \\ 1.1 \\ 1.3 \\ 1.7 \\ 2.2 \\ 2.5 \\ 2.7 \\ 3 \\ 3.3 \\ 3.8 \\ 4.5 \\ 4.9 \\ 5.3 \\ 5.9 \\ 6.1 \\ 6.5 \\ 7 \\ 7.7 \\ 7.9 \\ 8.3 \\ 9.1 \\ 9.5 \\ 9.7 \\ 10.1 \\ 10.3 \\ 10.7 \\ 11.1 \end{bmatrix}, \quad \ddot{\beta}' = \begin{bmatrix} 0.832 \\ 1.735 \\ 3.095 \\ 2.609 \\ 0.899 \\ -1.924 \\ -6.13 \\ -11.565 \\ -18.047 \\ -25.128 \\ -32.092 \\ -38.979 \\ -46.214 \\ -51.116 \\ -51.857 \\ -43.329 \\ -36.733 \\ -22.233 \\ -11.848 \\ 1.416 \\ 19.769 \\ 61.176 \\ 94.006 \\ 145.979 \\ 200.717 \\ 243.717 \\ 296.951 \\ 341.095 \\ 378.234 \end{bmatrix}.$$

В работе были рассмотрены:

- линейная модель, для которой коэффициент множественной корреляции $R = 0,754$;
- параболическая модель, для которой коэффициент множественной корреляции $R = 0,964$;
- гиперболическая модель, для которой коэффициент множественной корреляции $R = 0,597$.

Так как коэффициент множественной корреляции у параболической модели наибольший, то она наиболее точно описывает связь между $\ddot{\beta}'$ и углами γ_1, γ_2, ψ .

Приведем расчет параболической модели.

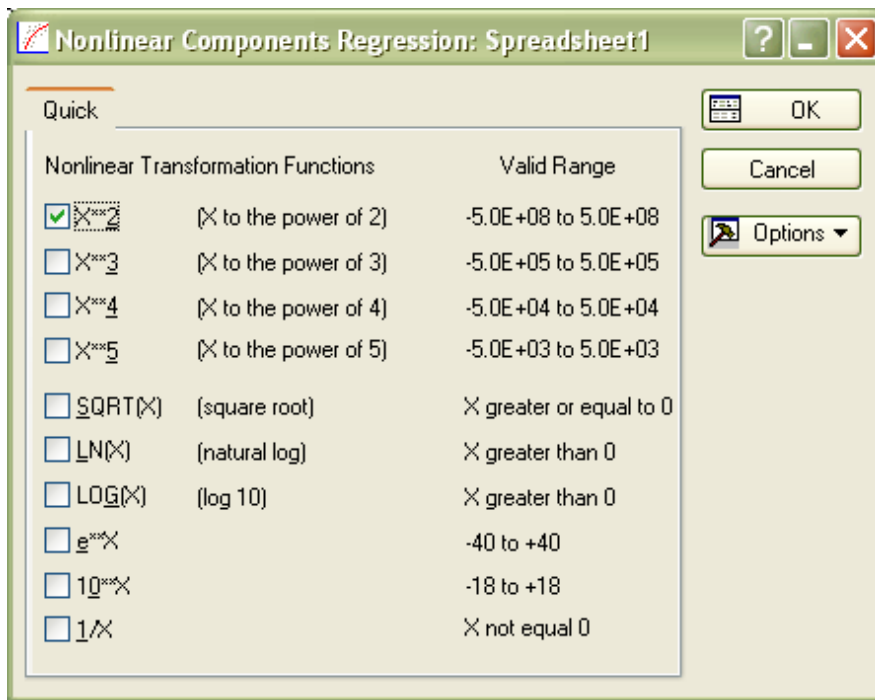


Рис. 4. Выбор модели для нелинейной многофакторной регрессии

Произведя все необходимые вычисления в программе STATISTICA, получим таблицу результатов.

Multiple Regression Results

Dependent: **beta** Multiple R = .96423730 F = 110.2967
 R² = .92975357 df = 3,25
 No. of cases: 29 adjusted R² = .92132400 p = .000000
 Standard error of estimate: 34.737408558
 Intercept: 89.164869002 Std. Error: 21.18733 t(25) = 4.2084 p = .0003

V2**2 b*=9.60 V3**2 b*=-7.5 V4**2 b*=-1.3

Regression Summary for Dependent Variable: beta (Spreadsheet1)
 R= .96423730 R²= .92975357 Adjusted R²= .92132400
 F(3,25)=110.30 p<.00000 Std. Error of estimate: 34.737

N=29	b*	Std. Err. of b*	b	Std. Err. of b	t(25)	p-value
Intercept			89.1649	21.18733	4.20841	0.000290
V2**2	9.60361	1.477173	19.2803	2.96559	6.50134	0.000001
V3**2	-7.48370	0.913547	-47.2314	5.76561	-8.19192	0.000000
V4**2	-1.27852	0.901895	-3.9265	2.76986	-1.41759	0.168655

Рис. 5. Результаты многофакторной регрессии для параболической модели

Полученная многофакторная модель зависимости функции отклика от предикторов $\hat{\beta}' = \hat{\beta}'(\gamma_1, \gamma_2, \psi)$ имеет вид:

$$\hat{\beta}' = 89.1649 + 19.2803 \cdot \gamma_1^2 - 47.2314 \cdot \gamma_2^2 - 3.9265 \cdot \psi^2.$$

Из приведенных результатов, полученных с помощью корреляционно-регрессионного анализа, следует, что:

- зависимость между откликом и предикторами сильная, так как $R = 0,964 > 0,75$;
- построенная параболическая регрессия адекватно описывает взаимосвязь между откликом и предикторами;
- свободный член статистически значим [9].

Полученная модель может быть использована:

- для прогнозирования значений углового ускорения β' ;
- для определения исходных значений углов γ_1, γ_2, ψ при заданном значении углового ускорения β' .

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики. – М.: 1954г. – 379с.
2. Малаховский Я. Э., Лапин А. А. - Карданные передачи. – М.: Машгиз, 1962г. – 153с.
3. Островерхов Н. Л., Русецкий И. К., Бойко Л. И. Динамическая нагруженность трансмиссий колёсных машин. – Мн.: Наука и техника. -1977г. – 191с.
4. Проектирование универсальных шарниров и ведущих мостов. Пер. с англ. Попова Ю. В. – Л.: Машиностроение. – 1984. – 463с.
5. Бойко Л. И. Механика приводов колеблющихся рабочих органов машин. – Мн.: ООО «Мэджик бук». – 2003г. – 239с.
6. Гурвич Ю. А., Сафронов К. И., Пашенко А. В. Анализ кинематических характеристик карданных передач / Теоретическая и прикладная механика. - Мн.: БНТУ. 2009 г. №24. – с. 261-266.
7. Гурвич Ю. А., Вареник А. А. Анализ кинематических характеристик одношарнирной и двухшарнирной карданных передач / Теоретическая и прикладная механика. - Мн.: БНТУ. 2010 г. № 25. – с. 258-262.
8. Тарасик В. П. Математическое моделирование технических систем. Мн.: Дизайн ПРО, 2004г. – 640с.
9. Халафян А. А. Учебник STATISTICA 6 Статистический анализ данных. - М.: Бином, 2007г. – 508с.
10. Лебедева Г. И., Микулик Н. А. Прикладная математика. - Мн.: Асар, 2009г. – 512с.