УДК 629.113.073

Гурвич Ю.А.

ВЫБОР КРИТЕРИЯ ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА СЕТОК

ГУО «Институт пограничной службы Республики Беларусь»

Минск, Беларусь

Показано, что задачи выбора критерия, разработки методики и комплекса программ многокритериальной оптимизации параметров транспортных средств во всем скоростном диапазоне движения машин должны решаться методами случайного поиска. С помощью методов Монте-Карло и ЛП$_\tau$-последовательности, по сравнению с методом сеток, выполняется минимальное количество вычислительных процедур за счет варьирования значениями сразу всех параметров.

Результаты данных исследований необходимо ввести в курсы лекций и практических занятий для студентов и курсантов технических вузов.

Задачи многокритериальной оптимизации значений геометрических, конструктивных и других параметров автомобилей во всем скоростном диапазоне движения на стадии их проектирования являются сложными научно-техническими задачами.

Для их решения:

во-первых, требуется, как правило, усилия целого коллектива: механиков, конструкторов, инженеров, математиков, программистов;

во-вторых, используются специальные методы, заимствованные из разных наук: механики (теоретической и аналитической механики, механики неголономных систем, теории устойчивости движения, теории качения колеса, теории автоматического регулирования, теории машин и механизмов и т.д.); математического моделирования; многокритериального синтеза, множество Парето; теории идентификации; теории вероятности и математической статистики; теории приближения функций и многих других теорий.

Затем эти методы «сшиваются» в единое целое, которое представляет собой новые методики, алгоритмы и программы выбора параметров автомобилей, удовлетворяющих сразу нескольким критериям, причем во всем скоростном диапазоне движения этих машин.

Пример практической реализации (в виде методик, алгоритмов и комплекса программ с использованием множества Парето) многокритериальной оптимизации значений параметров управляемой оси (или управляемого моста), рулевой трапеции автомобилей и автобусов «МАЗ», приведен в [1,2].

Для успешного решения задач многокритериальной оптимизации необходимо выбрать «хороший» метод оптимизации (обозначим этот метод – «М*»), который обеспечит выполнение из множества существующих критериев, по меньшей мере, этих двух, не всегда коррелированных между собой, критериев [3]:

минимальное количество вычислительных процедур;

минимальное время счета.

В качестве исходного материала для поиска «М*» используем:

простейший метод оптимизации – метод сеток (или метод перебора значений всех параметров в узлах сетки [4]), аналогом, которого может служить лист бумаги в клетку (с параметрами X и Y), где на пересечении горизонтальных – X и вертикальных − Y линий расположены узлы сетки. При одинаковом числе разбиений параметров число узлов равно X^2=Y^2. Если добавить третий параметр Z, то число узлов – X^3=Y^3=Z^3. Такие вычисления можно выполнить для n-мерного пространства параметров при не одинаковом (и при одинаковом) числе разбиений каждого из параметров;

геометрические, жесткостные, массовые, конструктивные и другие параметры в виде n-мерного пространства параметров, представляющие собой коэффициенты механико-математического описания движения транспортного средства, иначе – коэффициенты, стоящие перед слагаемыми каждого уравнения системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику транспортного средства.

В данной работе: реализованы алгоритмы расчетов количества узлов сетки, использующие методы комбинаторики и правило круговой подстановки при одинаковом и не одинаковом числе разбиений параметров; получен ответ на вопрос: «В чем же выигрывает проектировщик, если одновременно варьировать два, три или более значений параметров при неизменных величинах остальных параметров механико-математического описания движения транспортного средства, по сравнению с изменением только одного параметра при неизменном значении остальных параметров»?

Выбор метода оптимизации осуществим после сравнения результатов вычислений по формулам, определяющим:

– количество совокупностей (или число сочетаний) значений параметров W_{fnN}^{n} для n-мерного пространства варьируемых параметров, когда число уровней варьирования каждой n-мерной координаты различно – f_{1i}, f_{2j},…, λf_{nN} (где i, j,…, N – текущие порядковые номера уровней варьирования по каждой n-мерной координате i=$\overline{1,\lambda_1}$; j=$\overline{1,\lambda_2}$;…; N=$\overline{1,\lambda_n}$);

– число зон устойчивости или неустойчивости движения управляемых колес машины $\mathrm{W}_{fnN}^{n}(k_1)$ (где k_1=$\overline{1,m}$) при одновременном варьировании значений сначала одного параметра $k_1 = 1$, затем двух $k_1 = 2$ … $k_1 = 1,2,\dots,(n-1),n$ при неизменных значениях остальных значений параметров в этой n-мерной совокупности параметров.

Расчет совокупностей параметров по формуле W_{fnN}^{n} для плоскости n=2 и для пространства n=3 (рис. 1) различных по физическому смыслу параметров и с разным числом уровней варьирования f_{1i}, f_{2j}, f_{3k}. Если i=$\overline{1,4}$; j=$\overline{1,2}$; k=$\overline{1,3}$, то $f_{1\lambda_1} = 4$, $f_{2\lambda_2} = 2, f_{3\lambda_3} = 3$. Тогда количество совокупностей параметров на плоскости f_{1i}, f_{3k} и в пространстве f_{1i}, f_{2j}, f_{3k} будет равно:

$$\mathrm{W}_{fnN}^{2} = f_{1\lambda_1} * f_{3\lambda_3}; \quad \mathrm{W}_{fnN}^{3} = f_{1\lambda_1} * f_{2\lambda_2} * f_{3\lambda_3};$$
$$\mathrm{W}_{fnN}^{2} = 4 * 3 = 12; \quad \mathrm{W}_{fnN}^{3} = 4 * 2 * 3 = 24.$$

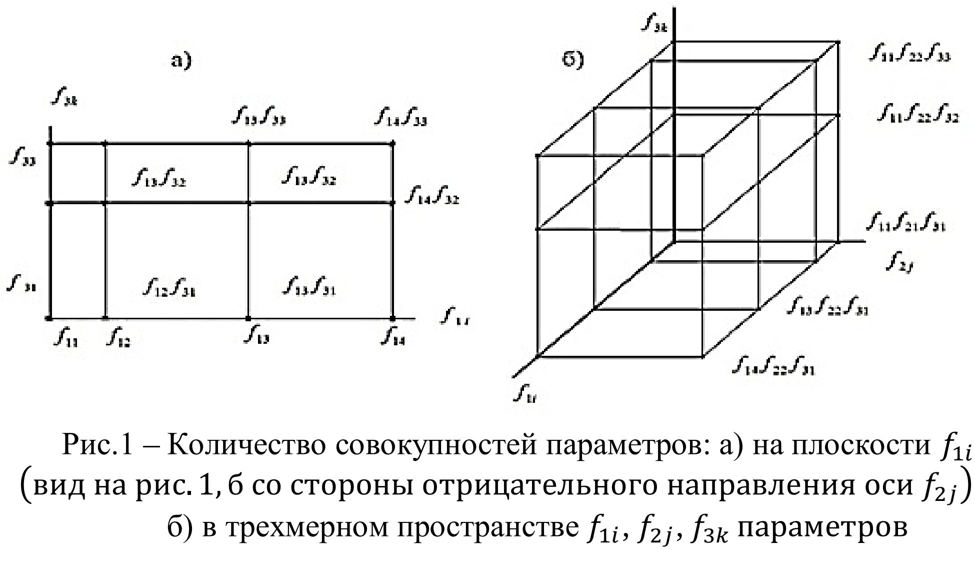

Рис.1 – Количество совокупностей параметров: а) на плоскости f_{1i}, f_{3k} (вид на рис. 1, б со стороны отрицательного направления оси f_{2j});
б) в трехмерном пространстве f_{1i}, f_{2j}, f_{3k} параметров

В n-мерном пространстве параметров количество всех совокупностей, содержащих по n параметров каждая, определяется выражением (1):

$$W_{fnN}^{n} = \prod_{n=1}^{n} f_{n\lambda_n}. \qquad (1)$$

Примеры расчета совокупностей параметров по формуле $W_{\mathrm{fnN}}^{\mathrm{n}}(k_1)$ при $k_1=\overline{1,m}$ будем реализовывать для однокритериальной задачи, где критерием устойчивости движения машины и функцией совокупности параметров является скорость движения управляемых колес – $V=V(f_{1i}, f_{2j}, f_{3k},\ldots, f_n)$, которая представляет поверхность в n-мерном пространстве параметров.

Пример 1. Скорость $V=V(f_{1i}; f_{2j})$ – функция двух параметров.

Чтобы построить эту поверхность в виде сетки необходимо:

во-первых, варьировать величину параметра f_{1i}, при неизменной какой-либо одной из величин f_{2j}, например f_{21}=const. При этом получим ряд точек V_{21_i}, где i=$\overline{1,\lambda_1}$, через которые, используя методы аппроксимации, проведем плавную кривую, являющуюся элементом сетки. Зависимость $V_{21_i}= V_{21_i}(f_{1i}, f_{21})$ представляет собой одну плоскую зону устойчивости. Всего нужно построить j=λ_2 плавных кривых и плоских зон устойчивости вида $V_{2j_i}= V_{2j_i}(f_{1i}, f_{2j})$;

во-вторых, варьируя величину f_{2j}, где j=$\overline{1,\lambda_2}$ при уже неизменной величине f_{1i}, где i=$\overline{1,\lambda_1}$, необходимо построить еще i=λ_1 плавных кривых и плоских зон устойчивости вида V_{1i_j}=$V_{1i_j}(f_{1i}, f_{2j})$.

Полное количество плоских зон устойчивости движения и плавных кривых, отображающих сетку в двухмерном пространстве параметров, определяется зависимостью

$$W_{fnN}^{2}(1) = \sum_{j=1}^{\lambda_2}\sum_{i=1}^{\lambda_1} V_{2j_i} + \sum_{i=1}^{\lambda_1}\sum_{j=1}^{\lambda_2} V_{1i_j}. \qquad (2)$$

В (2) первое слагаемое определяет количество плавных кривых параллельных оси j и равное λ_2, второе слагаемое – наоборот: параллельных оси i и равное λ_1.

Если одновременно варьировать величины двух параметров, то для изучения поверхности $V(f_{1i}, f_{2j})$ необходимо построить всего одну двухмерную область устойчивости.

Пример 2. Скорость $V = V(f_{1i}, f_{2j}, f_{3k})$ – функция трех параметров.

$W_{fnN}^{3}(1)$ определим по (3), используя правило круговой подстановки (рис. 2), в скобках каждого слагаемого указывается тот недостающий параметр, величину которого варьируют:

$$W_{fnN}^{3}(1) = f_{1\lambda_1}*f_{2\lambda_2}(f_{3k})+f_{2\lambda_2}*f_{3\lambda_3}(f_{1i})+f_{3\lambda_3}*f_{1\lambda_1}(f_{2j}). \qquad (3)$$

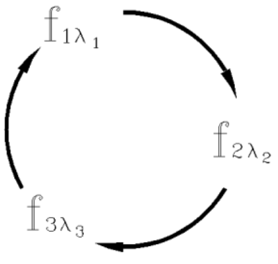

Рис. 2 – Правило круговой подстановки в (3) работает только в положительном направлении

Число плоских зон устойчивости по (3) для рис. 1,б равно:

$$W_{fnN}^{3}(1)=4*2+2*3+3*4=26.$$

$W_{fnN}^{3}(2)$ определим по (4), в скобках каждого слагаемого указываются те недостающие параметры, величину которых варьируют:

$$W_{fnN}^{3}(2)= f_{1\lambda_1}(f_{2j}f_{3k})+ f_{2\lambda_2}(f_{3k}f_{1i})+f_{3\lambda_3}(f_{1i}\ f_{2j}) \tag{4}$$

Иначе, число зон устойчивости $W_{fnN}^{3}(2)$ равно сумме чисел уровней варьирования по каждой координате. Для рис. 1,б число плоских зон устойчивости равно: $W_{fnN}^{3}(2)$=4+2+3=9.

Если одновременно варьировать величины трех параметров, то для изучения поверхности V=V(f_{1i}, f_{2j}, f_{3k}) необходимо построить всего одну трехмерную область устойчивости.

Пример 3. Скорость V=V($f_{1i}, f_{2j}, f_{3k}, f_{4l}$) – функция четырех параметров.

W_{fnN}^{4} (1) определим по (5), используя правило круговой подстановки (рис. 3,а):

$$W_{fnN}^{4}(1)= f_{1\lambda_1}*f_{2\lambda_2}*f_{3\lambda_3}+f_{2\lambda_2}*f_{3\lambda_3}*f_{4\lambda_4}+f_{3\lambda_3}*f_{4\lambda_4}*f_{1\lambda_1}+f_{4\lambda_4}*f_{1\lambda_1}*f_{2\lambda_2}. \tag{5}$$

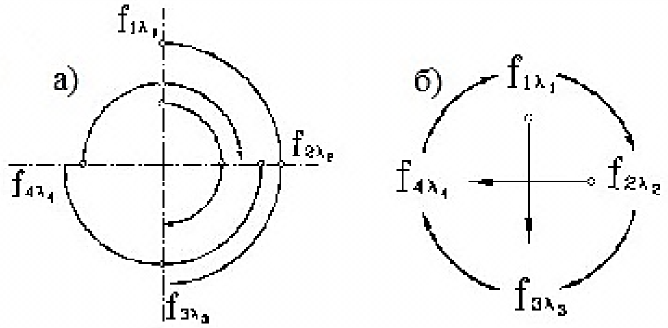

Рис. 3 – Правило круговой подстановки для четырёх параметров

W_{fnN}^{4} (2) определим по (6), используя правило круговой подстановки (рис. 3,б):

$$W_{fnN}^{4}(2)= f_{1\lambda_1}*f_{2\lambda_2}+f_{2\lambda_2}*f_{3\lambda_3}+f_{3\lambda_3}*f_{4\lambda_4}+f_{4\lambda_4}*f_{1\lambda_1}+f_{1\lambda_1}*f_{3\lambda_3}+f_{2\lambda_2}*f_{4\lambda_4}. \tag{6}$$

$W_{fnN}^{4}(3)$ равно сумме чисел уровней варьирования по каждой четырехмерной координате.

В случае одновременного варьирования значений четырех параметров для изучения поверхности V=V($f_{1i}, f_{2j}, f_{3k}, , f_{4l}$) необходимо построить всего одну четырехмерную область устойчивости.

Пример 4. Скорость V=V($f_{1i}, f_{2j}, f_{3k}, , f_{4l}, , f_{5m}$) – функция пяти параметров.

$W_{fnN}^{5}(1)$ определим по (7), используя правило круговой подстановки (рис. 4)

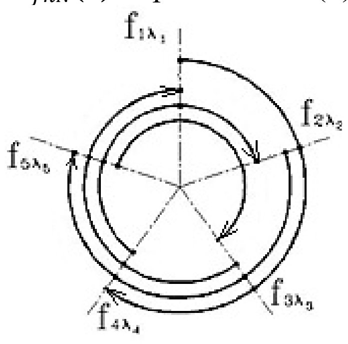

Рис. 4 – Правило круговой подстановки для пяти параметров в (7) работает только в положительном направлении

$$W_{fnN}^{5}(1)=f_{1\lambda_1}*f_{2\lambda_2}*f_{3\lambda_3}*f_{4\lambda_4}+f_{2\lambda_2}*f_{3\lambda_3}*f_{4\lambda_4}*f_{5\lambda_5}+f_{3\lambda_3}*f_{4\lambda_4}*f_{5\lambda_5}*f_{1\lambda_1}+$$
$$+f_{4\lambda_4}*f_{5\lambda_5}*f_{1\lambda_1}*f_{2\lambda_2}+f_{5\lambda_5}*f_{1\lambda_1}*f_{2\lambda_2}*f_{3\lambda_3}. \tag{7}$$

$W_{fnN}^5(2)$ определим по (8), используя правило круговой подстановки (рис. 5):

$$W_{fnN}^5(2)=f_{1\lambda_1}*f_{2\lambda_2}*f_{3\lambda_3}+f_{2\lambda_2}*f_{3\lambda_3}*f_{4\lambda_4}+f_{3\lambda_3}*f_{4\lambda_4}*f_{5\lambda_5}+f_{4\lambda_4}*f_{5\lambda_5}*f_{1\lambda_1}+f_{5\lambda_5}*f_{1\lambda_1}*f_{2\lambda_2}+$$
$$+f_{1\lambda_1}*f_{3\lambda_3}*f_{4\lambda_4}+f_{2\lambda_2}*f_{4\lambda_4}*f_{5\lambda_5}+f_{3\lambda_3}*f_{5\lambda_5}*f_{1\lambda_1}+f_{4\lambda_4}*f_{1\lambda_1}*f_{2\lambda_2}+f_{5\lambda_5}*f_{2\lambda_2}*f_{3\lambda_3}. \quad (8)$$

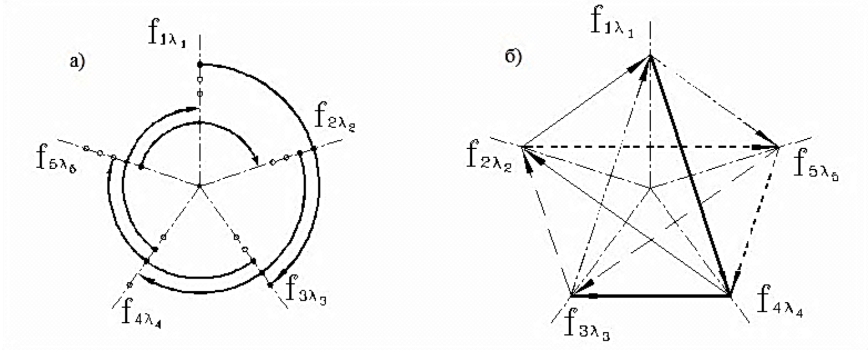

Рис. 5 – Правило круговой подстановки: а) для первых пяти слагаемых в (8); б) для вторых пяти слагаемых в (8)

$W_{fnN}^5(3)$ определим по (9), используя правило круговой подстановки (рис. 6):

$$W_{fnN}^5(3)=f_{1\lambda_1}*f_{2\lambda_2}+f_{2\lambda_2}*f_{3\lambda_3}+f_{3\lambda_3}*f_{4\lambda_4}+f_{4\lambda_4}*f_{5\lambda_5}+f_{5\lambda_5}*f_{1\lambda_1}+$$
$$+f_{1\lambda_1}*f_{3\lambda_3}+f_{2\lambda_2}*f_{4\lambda_4}+f_{3\lambda_3}*f_{5\lambda_5}+f_{4\lambda_4}*f_{1\lambda_1}+f_{5\lambda_5}*f_{2\lambda_2}. \quad (9)$$

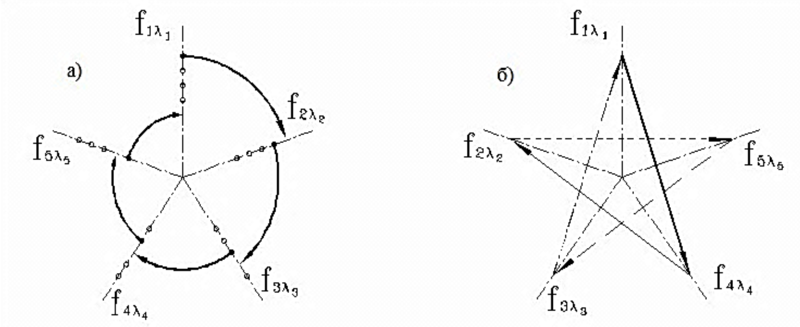

Рис. 6 – Правило круговой подстановки: а) для первых пяти слагаемых в (9); б) для вторых пяти слагаемых в (9)

$W_{fnN}^5(4)$ равно сумме чисел уровней варьирования по каждой пятимерной координате.

В случае одновременного варьирования значений пяти параметров для изучения поверхности V=V($f_{1i}, f_{2j}, f_{3k},, f_{4l},, f_{5m}$) необходимо построить всего одну пятимерную область устойчивости.

Более наглядными являются расчеты, когда каждый параметр из n-мерного пространства параметров делится на одинаковое число частей. Используя методы комбинаторики - размещения, сочетания и перестановки, реализуем при n=10 алгоритм вычислений количества узлов сетки, который представляет собой последовательность вычислительных процедур: сначала нужно варьировать только одним параметром из десяти, остальные девять параметров закреплены; затем варьировать двумя параметрами при закрепленных остальных восьми параметрах. Расчеты необходимо продолжать до тех пор, пока число одновременно варьируемых параметров достигнет десяти.

Результаты расчетов приведены в таблице 1, которая содержит вычисления числа расчётных точек (узлов сетки), в соответствии с формулой (10):

$$W_f^n(k_1)= f^n(k_1), \quad (10)$$

где f – число разбиений одинаковое для каждого из варьируемых параметров, может последовательно принимать значения из ряда – 2,3,4,5,6; n – количество параметров системы, может последовательно принимать значения из ряда − 1,2,…,10; k_1 – число одновременно варьируемых параметров, может последовательно принимать значения из ряда − 1,2,…,10.

Таблица 1 − Число узлов сетки $W_f^{\,n}\left(k_1\right)$ при различном количестве одновременно варьируемых параметров $\left(k_1=\overline{1,n}\right)$

Количество сечений зон устойчивости движений управляемых колёс машин $W_f^n(k_1)$ при различных $\left(k_1=\overline{1,n}\right)$																	
			$W_f^n(10)$		$W_f^n(9)$		$W_f^n(8)$	$W_f^n(7)$	$W_f^n(6)$	$W_f^n(5)$	$W_f^n(4)$	$W_f^n(3)$	$W_f^n(2)$	$W_f^n(1)$	W_f^n	f	n
1	$W_f^1(k_1)$		f^0	f^0	$10f^1$		$45f^2$	$120f^3$	$210f^4$	$252f^5$	$210f^6$	$120f^7$	$45f^8$	$10f^9$	$W_f^{10}(k_1)$		10
	2	2	1	1	20		180	960	3360	8064	13440	15360	15360	5120	1024	2	
	3	3	1	1	30		405	3240	17010	61236	153090	264440	264440	196830	59049	3	
	4	4	1	1	40		720	7680	53760	258048	860160	1966080	1966080	2624440	1048576	4	
	5	5	1	1	50		1125	15000	131250	787500	3281250	9375000	9375000	19531250	9765625	5	
	6	6	1	1	60		1620	25920	272160	195955	9797760	33592320	33592320	100776960	60466176	6	
2	$W_f^2(k_1)$		$2f^1$		f^0	f^0	$9f^1$	$36f^2$	$84f^3$	$126f^4$	$126f^5$	$84f^6$	$36f^7$	$9f^8$	$W_f^9(k_1)$		9
	2	4	4		1	1	18	144	672	2016	4032	5376	4608	2304	512	2	
	3	9	6		1	1	27	324	2268	10206	30618	61236	7732	59049	19683	3	
	4	16	8		1	1	36	576	5376	32256	393750	344064	589824	589824	262144	4	
	5	25	10		1	1	45	900	10500	78750	129024	1312500	2812500	3515625	1953125	5	
	6	36	12		1	1	54	1296	18144	163296	979776	3919104	10077696	15116544	10077696	6	
n	f	W_f^n	$W_f^n(1)$		$W_f^n(2)$												

					$W_f^n(8)$		$W_f^n(7)$		$W_f^n(6)$	$W_f^n(5)$	$W_f^n(4)$	$W_f^n(3)$	$W_f^n(2)$	$W_f^n(1)$	W_f^n	f	n
3	$W_f^3(k_1)$		$3f^2$	$3f^1$	f^0	f^0	$8f^1$		$28f^2$	$56f^3$	$70f^4$	$56f^5$	$28f^6$	$8f^7$	$W_f^8(k_1)$		8
	2	8	12	6	1	1	16		112	448	1120	1792	1792	1024	256	2	
	3	27	27	9	1	1	24		252	1512	5670	13608	20412	17496	6561	3	
	4	64	45	12	1	1	32		448	3584	17920	57344	114688	131072	65536	4	
	5	125	75	15	1	1	40		700	7000	43750	175000	437500	625000	390625	5	
	6	216	108	18	1	1	48		1008	12096	90720	435456	1306368	2239488	1679616	6	
4	$W_f^4(k_1)$		$4f^3$	$6f^2$	$4f^1$		f^0	f^0	$7f^1$	$21f^2$	$35f^3$	$35f^4$	$21f^5$	$7f^6$	$W_f^7(k_1)$		7
	2	4	32	24	8		1	1	14	84	280	560	672	448	128	2	
	3	9	108	54	12		1	1	21	189	945	2835	5203	5103	2187	3	
	4	16	256	96	16		1	1	28	336	2240	8960	21504	28672	16384	4	
	5	25	500	150	20		1	1	35	525	4375	21875	65625	109375	78125	5	
	6	36	864	216	24		1	1	42	756	7560	45360	163296	326592	279936	6	
5	$W_f^5(k_1)$		$5f^4$	$10f^4$	$10f^2$		$5f^1$	f^0	f^0	f^1	f^2	f^3	f^4	f^5	$W_f^6(k_1)$		6
	2	32	80	80	40		10	1	1	12	60	160	240	192	64	2	
	3	343	405	405	90		15	1	1	18	135	540	2115	1458	729	3	
	4	1024	1280	1280	160		20	1	1	24	240	960	3840	6144	4096	4	
	5	3125	3125	3125	250		25	1	1	30	375	2500	9375	18750	15625	5	
	6	7776	6482	6482	360		30	1	1	36	540	4320	19440	46656	46656	6	
n	f	W_f^n	$W_f^n(1$	$W_f^n(2)$	$W_f^n(2)$		$W_f^n(4)$	$W_f^n(5)$									

Анализ таблицы 1 показал, что минимальное количество вычислительных процедур и, соответственно, минимальное время счета можно получить при одновременном варьировании n параметров из n параметров. При этом необходимо строить всего лишь одну n-мерную картину устойчивости.

Этот результат позволяет из имеющегося большого количества методов нелинейного программирования выбрать методы, позволяющие варьировать значениями сразу всех параметров, например, − методы случайного поиска: метод Монте-Карло, метод ЛП$_\tau$-последовательности [5] и другие методы.

Метод ЛП$_\tau$-последовательности отличается от метода Монте-Карло [5, с. 26] повышенной равномерностью разбиения на части каждого варьируемого параметра из n-мерного пространства параметров. Это хорошо видно при разбрасывании десяти точек тремя методами на отрезке прямой линии: самая большая разница в величине десяти отрезков между собой у метода Монте-Карло; при использовании метода ЛП$_\tau$-последовательности величина каждого из десяти отрезков отличается друг от друга − незначительно, что, практически, соответствует величине отрезков, построенных методом сеток.

Поэтому, рассуждения об одинаковом разбиении каждого варьируемого параметра из n-мерного пространства параметров и таблица 1 больше соответствуют методу ЛП$_\tau$-последовательности. Математические выкладки при не одинаковом разбиении каждого варьируемого параметра, наоборот: − больше соответствуют методу Монте-Карло.

С помощью методов случайного поиска, например – Монте-Карло можно получить огромный выигрыш в количестве расчетов. В этом как раз и выигрывает проектировщик, если одновременно варьировать два, три или более значений параметров при неизменных величинах остальных параметров. Применяя метод сеток на плоскости двух параметров $n = 2$, каждый из которых делится на десять частей $f = 10$, нужно выполнить 10^2 вычислительных процедур. При использовании метода Монте-Карло – всего десять (причем каждый из двух параметров будет разделен на десять не одинаковых между собой частей). В трехмерном пространстве параметров выигрыш в количестве расчетов ещё более очевиден: при методе сеток – 10^3 вычислений, а с помощью метода Монте-Карло – всего десять (причем каждый из трех параметров будет разделен на десять не одинаковых между собой частей). В десятимерном пространстве параметров: при методе сеток – 10^{10} вычислений, а с помощью метода Монте-Карло – всего десять (причем каждый из десяти параметров будет разделен на десять не одинаковых между собой частей).

Заключение. Минимальное количество вычислительных процедур и, соответственно, минимальное время счета можно получить при одновременном варьировании значениями n параметров из n-мерного пространства параметров при не одинаковом (или одинаковом) числе разбиений каждого из параметров. При этом необходимо строить всего лишь одну n-мерную картину устойчивости.

Этот результат позволяет из имеющегося большого количества методов нелинейного программирования выбрать такие методы «М*», которые обеспечивают варьирование значениями сразу всех параметров, например, − методы случайного поиска: метод Монте-Карло, метод ЛП$_\tau$-последовательности.

Задачи выбора критерия, разработки методики и комплекса программ многокритериальной оптимизации параметров транспортных средств во всем скоростном диапазоне движения машин должны решаться методами случайного поиска.

Результаты данных исследований необходимо ввести в курсы лекций и практических занятий для студентов и курсантов технических вузов по дисциплинам «Конструирование и расчет деталей транспортных средств», «Теория мобильных машин», «Методы одно – и многокритериальной оптимизации параметров машин».

ЛИТЕРАТУРА

1. Гурвич, Ю. А. Многокритериальная оптимизация параметров управляемой оси автобусов и автомобилей «МАЗ» / Ю.А. Гурвич // Научные труды международной научно-практической конференции учёных МАДИ (ГТУ), РГАУ-МСХА, ЛНАУ. Москва-Луганск: 2010, – с. 99-105. 2. Гурвич, Ю.А. Многокритериальная оптимизация параметров рулевых трапеций автобусов и автомобилей «МАЗ» / Ю.А. Гурвич, Е.П. Лебедев // Материалы VIII международной научно-практической конференции «Новости научного прогресса», 17-25 августа 2012. Т.10, с. 11-13. – София: Бял ГРАД-БГ ООД. 3. Соболь, И.М. Наилучшие решения – где их искать / И.М. Соболь, Р.Б. Статников. – Москва: «Знание», 1982. – 64 с. 4. Вентцель, Е.С. Теория вероятности / Е.С. Вентцель. – Москва: Наука, 1969. – 576 с. 5. Соболь, И.М. Точки, равномерно заполняющие многомерный куб / И.М. Соболь. – Москва: «Знание», 1985. – 32 с.