

**РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УГЛОВОГО УСКОРЕНИЯ  
ВЫХОДНОГО ВАЛА КАРДАННЫХ ПЕРЕДАЧ  
В ФУНКЦИИ ДВУХ УГЛОВ***ГУО «Институт пограничной службы Республики Беларусь»**Минск, Беларусь*

*В данной статье выполнено исследование углового ускорения одно- и двух шарнирной карданной передачи в функции двух углов при переменном угле излома. С угловым ускорением связано возникновение дополнительного крутящего момента на колесах машин в виде периодической и почти гармонической функции. Установлено, по всей видимости, впервые, что этот дополнительный крутящий момент придает вращающемуся колесу ещё и осциллирующее движение относительно его оси вращения. Это негативно отразится на работе многих деталей транспортного средства.*

Из теоретической механики [1–2] известно, что основными показателями вращения любого тела, в том числе выходного вала карданной передачи являются его кинематические характеристики: угол поворота, угловая скорость и угловое ускорение. Как известно из литературы [3–7] основным критерием неравномерности вращения любого тела является его угловая скорость, которая оказывает негативное влияние на выходные характеристики трансмиссии и механизмы машин.

При подготовке технических специалистов, занимающихся разработкой и эксплуатацией автомобильной техники, недостаточное внимание в технической литературе и в учебном процессе технических вузов уделяется изучению вопроса, связанного с угловым ускорением выходного вала одно – и двухшарнирной карданной передачи в функции двух углов [1–7].

В данной работе с помощью математического пакета Mathcad выполнено исследование кинематических характеристик одно – и двух шарнирной карданной передачи с переменным углом излома. Основное внимание посвящено изучению углового ускорения, с которым связано возникновение дополнительного крутящего момента на колесах машин. Установлено, по всей видимости, впервые, что этот дополнительный крутящий момент придает вращающемуся колесу ещё и осциллирующее движение относительно его оси вращения. Это негативно отразится на работе многих деталей транспортного средства.

Рассмотрим трансмиссию транспортного средства (рис. 1), где мощность от коробки передач к ведущему мосту передается посредством одношарнирной карданной передачи, которая в процессе движения машины может изменять свое первоначальное положение.

Для одношарнирной карданной передачи (рис. 2) из [1-3] известна зависимость

$$\omega_2 = \omega_1 \cdot \frac{\cos(\alpha)}{1 - \sin^2(\alpha) \cdot \cos^2(\lambda)}, \quad (1)$$

где  $\lambda$  – угол поворота ведущего вала;  $\alpha$  – угол излома карданного шарнира.

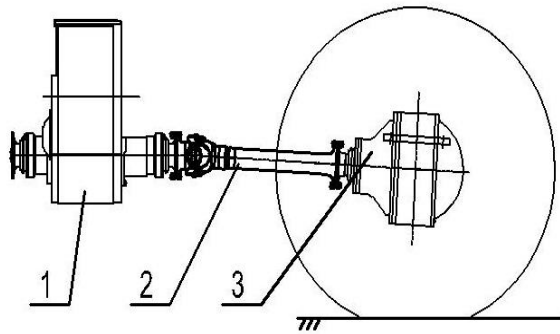


Рис. 1 – Схема установки одношарнирной карданной передачи на транспортном средстве:

- 1 – коробка переключения передач;
- 2 – карданный вал;
- 3 – задний мост с колесами

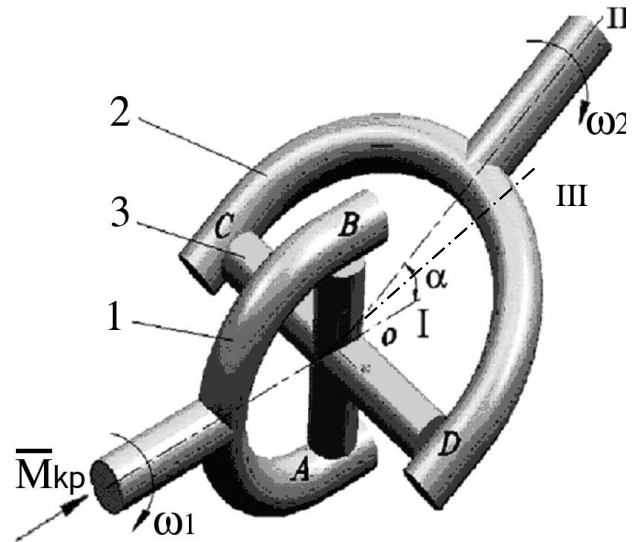


Рис. 2 – Кинематическая схема карданного шарнира: 1, 2 – вилки; 3 – крестовина; I – ось вращения вилки 1; II – ось вращения вилки 2;  $\alpha$  – угол излома между осями I и II; III – новое положение оси вращения вилки 2 при переменном угле  $\alpha$ ;  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – угловые скорости ведущего и ведомого валов

В выражении (1) введем замену:

$$K(\alpha, \lambda) = \frac{\cos(\alpha)}{1 - \sin^2(\alpha) \cdot \cos^2(\lambda)}. \quad (2)$$

Тогда

$$\omega_2 = \omega_1 \cdot K(\lambda, \alpha). \quad (3)$$

Определим угловое ускорение ведомого вала  $\varepsilon_2$ , взяв полную производную по времени от левой и правой частей выражения (3):

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d\omega_1}{dt} \cdot K(\alpha, \lambda) + \omega_1 \cdot \left( \frac{\partial K(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dt} + \frac{\partial K(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} \right). \quad (4)$$

Представим выражение (4) в другом виде:

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \varepsilon_1 \cdot K(\alpha, \lambda) + \omega_1 \cdot \left( \frac{\partial K(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda} \cdot \omega_\lambda + \frac{\partial K(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha} \cdot \omega_\alpha \right), \quad (5)$$

где  $\omega_\lambda = \frac{d\lambda}{dt}$ ;  $\varepsilon_1$  – угловое ускорение входного вала;  $\omega_\alpha = \frac{d\alpha}{dt}$  – угловая скорость ведомого вала при перемещении оси II в положение III (см. рис. 2).

Для анализа выражения (5) рассмотрим четыре случая.

**Первый случай.** Угловое ускорение входного вала  $\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = 0$  (входной вал вращается равномерно), угловая скорость ведомого вала при перемещении оси II в положение III  $\omega_\alpha = \frac{d\alpha}{dt} = 0$  (угол излома  $\alpha = const$ , ось II – неподвижна).

Выражение (5) упрощается:

$$\varepsilon_2^{(1)} = \omega_1 \cdot \left( \frac{\partial K(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dt} \right) = \omega_1^2 \cdot \frac{\partial K(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda}. \quad (6)$$

В выражении (6) введем замены:  $k\lambda(\alpha, \lambda) = \frac{\partial K(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda}$ ,  $\omega_1 = \omega_1$  и  $\varepsilon_{21}(\alpha, \lambda, \omega_1) = \varepsilon_2^{(1)}$ .

Тогда  $\varepsilon_{21}(\alpha, \lambda, \omega_1)$  примет вид:

$$\varepsilon_{21}(\alpha, \lambda, \omega_1) := k\lambda(\alpha, \lambda) \cdot \omega_1^2.$$

Найдем частную производную  $k\lambda(\alpha, \lambda)$ :

$$k\lambda(\alpha, \lambda) := \frac{(-1 + \cos(\alpha))^2 \cdot (2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\lambda) \cdot \sin(\lambda))}{1 - 2 \cdot \cos(\lambda)^2 + 2 \cdot \cos(\lambda)^2 \cdot \cos(\alpha)^2 + \cos(\lambda)^4 - 2 \cdot \cos(\lambda)^4 \cdot \cos(\alpha)^2 + \cos(\lambda)^4 \cdot \cos(\alpha)^4}$$

Построим графики зависимости углового ускорения  $\varepsilon_{21}(\alpha, \lambda, \omega_1)$  в функции угла поворота ведущего вала  $\lambda$  при различных значениях угла излома  $\alpha$  ( $\omega_1 = 30\pi$  рад/с)

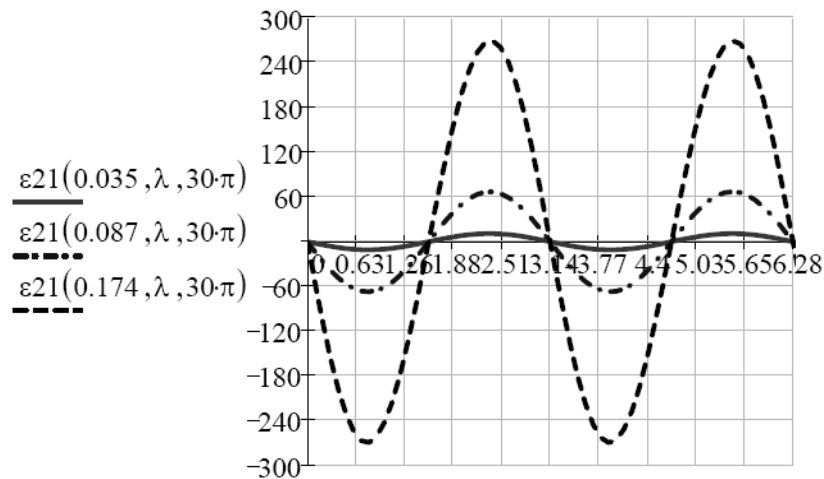


Рис. 3 – График зависимости углового ускорения  $\varepsilon_{21}$  в функции угла поворота ведущего вала  $\lambda$  при различных значениях угла излома:  $\alpha=0,035; 0,087; 0,174$  рад ( $2^\circ; 5^\circ; 10^\circ$ )

**Второй случай.** Угловое ускорение входного вала  $\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = 0$ , угловая скорость ведомого вала при перемещении оси II в положение III  $\omega_\alpha = \frac{d\alpha}{dt} \neq 0$  (при переменном угле  $\alpha$  ось II – подвижна).

Выражение (5) примет вид:

$$\varepsilon_2^{(2)} = \omega_1 \cdot \left( \frac{\partial K(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dt} + \frac{\partial K(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} \right) = \omega_1^2 \cdot \frac{\partial K(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda} + \omega_1 \cdot \frac{\partial K(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha} \cdot \omega_\alpha. \quad (7)$$

В выражении (7) введем замены:

$$k\alpha(\alpha, \lambda) = \frac{\partial K(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha}, \quad \varepsilon_{22\alpha} = k\alpha(\alpha, \lambda) \cdot \omega_1 \cdot \omega_\alpha, \quad \varepsilon_{22\lambda} = k\lambda(\alpha, \lambda) \cdot (\omega_1)^2, \quad \varepsilon_{22}(\alpha, \lambda) = \varepsilon_2^{(2)}.$$

Тогда  $\varepsilon_{22}(\alpha, \lambda)$  равно:

$$\varepsilon_{22}(\alpha, \lambda) := \varepsilon_{22\alpha}(\alpha, \lambda) + \varepsilon_{22\lambda}(\alpha, \lambda).$$

Найдем частную производную  $k\alpha(\alpha, \lambda)$ :

$$k\alpha(\alpha, \lambda) := \frac{(-1 + \cos(\lambda)^2 + \cos(\lambda)^2 \cdot \cos(\alpha)^2) \cdot \sin(\alpha)}{1 - 2 \cdot \cos(\lambda)^2 + 2 \cdot \cos(\lambda)^2 \cdot \cos(\alpha)^2 + \cos(\lambda)^4 - 2 \cdot \cos(\lambda)^4 \cdot \cos(\alpha)^2 + \cos(\lambda)^4 \cdot \cos(\alpha)^4}$$

Построим графики функций  $\varepsilon_{22\alpha}(\alpha, \lambda)$  и  $\varepsilon_{22}(\alpha, \lambda)$  при  $\omega_1 \cdot \omega_\alpha \cong \pi^2$

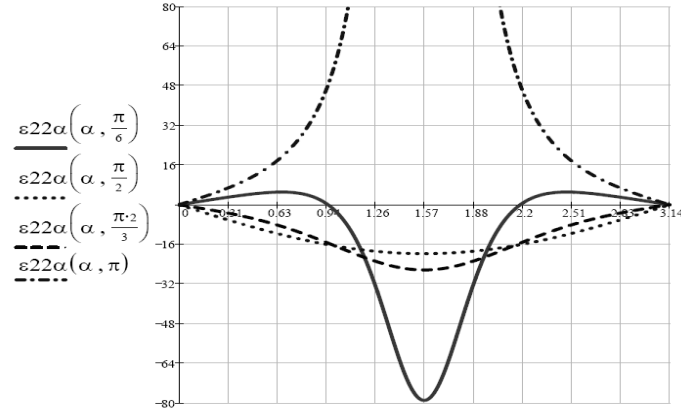


Рис. 4 – График зависимости углового ускорения  $\varepsilon_{22\alpha}$  в функции угла излома  $\alpha$  при различных значениях угла  $\lambda$ :  $\lambda = \frac{\pi}{6}$ ;  $\frac{\pi}{2}$ ;  $\frac{2\pi}{3}$ ;  $\pi$  рад

**Третий случай.** Угловое ускорение входного вала  $\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} \neq 0$ , угловая скорость ведомого вала при перемещении оси II в положение III  $\omega_\alpha = \frac{d\alpha}{dt} = 0$  (угол излома  $\alpha = const$ , ось II – неподвижна).

Выражение (5) примет вид:

$$\varepsilon_2^{(3)} = \frac{d\omega_1}{dt} \cdot K(\alpha, \lambda) + \omega_1^2 \cdot \frac{\partial K(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda}. \quad (8)$$

Тогда  $\varepsilon_{23}(\alpha, \lambda)$  равно:  $\varepsilon_{23}(\alpha, \lambda) := \varepsilon_1 \cdot k(\alpha, \lambda) + \omega_1^2 \cdot k\lambda(\alpha, \lambda)$ .

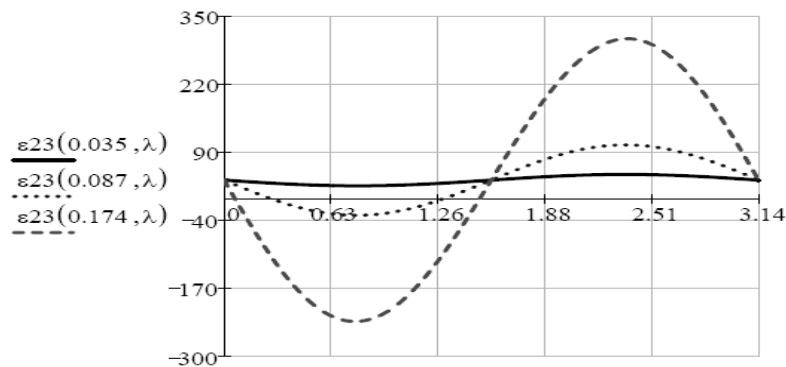


Рис. 5 – График зависимости углового ускорения  $\varepsilon_{23}$  в функции угла поворота ведущего вала при различных значениях угла излома: 0,035; 0,087; 0,174 рад ( $2^\circ$ ;  $5^\circ$ ;  $10^\circ$ )

**Четвертый случай.** Угловое ускорение входного вала  $\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} \neq 0$ , угловая скорость ведомого вала при перемещении оси II в положение III  $\omega_\alpha = \frac{d\alpha}{dt} \neq 0$  (при переменном угле  $\alpha$  ось II - подвижна).

Выражение (5) примет вид:

$$\varepsilon_2^{(4)} = \frac{d\omega_1}{dt} \cdot K(\alpha, \lambda) + \omega_1^2 \cdot \frac{\partial K(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda} + \frac{\partial K(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} \cdot \omega_1. \quad (9)$$

Тогда  $\varepsilon_{24}(\alpha, \lambda)$  равно:  $\varepsilon_{24}(\alpha, \lambda) := \varepsilon_1 \cdot k(\alpha, \lambda) + \omega_1^2 \cdot k\lambda(\alpha, \lambda) + \omega_\alpha \cdot \omega_1 \cdot k\alpha(\alpha, \lambda)$ .

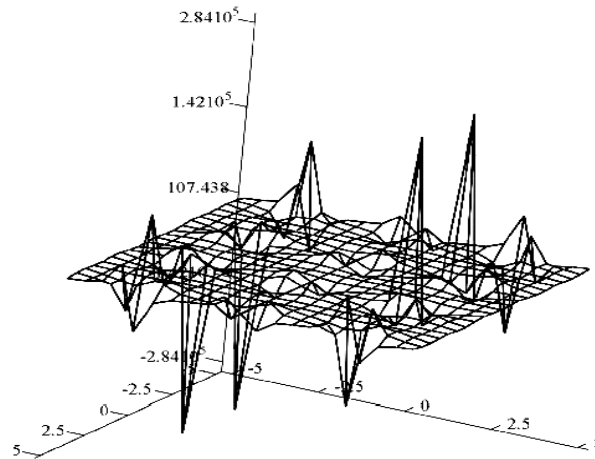


Рис. 6 – График зависимости углового ускорения  $\varepsilon_{24}$  в функции двух углов:  $\alpha$  и  $\lambda$

Знание углового ускорения  $\varepsilon_2$  позволит впервые учесть влияние дополнительного момента  $M_1 = M_1(\alpha)$  в функции угла излома  $\alpha$ , действующего на колеса машины и равного произведению осевого момента инерции колес с карданом относительно оси вращения колес  $I_x$  на угловое ускорение  $\varepsilon_2$

$$M_1(\alpha) = I_x \varepsilon_2.$$

В результате суммарный момент M1 на колесе примет вид (10):

$$M1 = M_{кр} + M_1(\alpha), \quad (10)$$

где  $M_{кр}$  – крутящий момент на входном валу вилки кардана (см. рис. 2).

Дополнительный момент  $M_1$  придает вращающемуся колесу ещё и осциллирующее движение относительно его оси вращения, что негативно отразится на работе многих деталей колесного транспортного средства.

Оценим влияние дополнительного момента  $M_1(\alpha)$  на суммарный момент M1 по величине относительного изменения  $\eta$  (11) в четырех случаях (формулы (6)-(9)) автомобиля БелАЗ-75800, принимая угол излома  $\alpha = \frac{\pi}{90}$  рад, что соответствует  $2^\circ$ :

$$\eta = \frac{M_1(\alpha)}{M_{кр}} \cdot 100\%. \quad (11)$$

БелАЗ-75800: число оборотов ведущего вала для 2-ой передачи –  $N = 500$  об/мин; крутящий момент на ведущем валу –  $M_{кр} = 6600$  Н.м<sup>2</sup>; момент инерции заднего моста –  $I_x = 100$  кг.м<sup>2</sup>; время поворота тележки сочлененной конструкции на угол  $\alpha = 45^\circ$  при

скорости движения автомобиля  $v=10$  км/ч равно  $t=10$  с. Тогда  $\omega_1 = 52$  рад/с,  $\omega_\alpha = \pi/40$  рад/с,  $\varepsilon_1 = 1,1$  рад/с<sup>2</sup>.

Результаты расчетов  $\eta$  для четырех значений углового ускорения  $\varepsilon_2^{(i)}$  ( $i=1, \dots, 4$ ) сведены в таблицу.

i	$\varepsilon_2,$ рад/с <sup>2</sup>	$\alpha,$ град	$M_{кр},$ Н.м	$I_X,$ кг.м <sup>2</sup>	$\omega_1,$ рад/с	$M_1(\alpha),$ Н.м	$\eta,$ %
1	3,26	2	6600	100	52	326	4,93
2	3,27	2	6600	100	52	327	4,95
3	4,36	2	6600	100	52	436	6,60
4	4,37	2	6600	100	52	437	6,62

Для скоростных карданных передач величины  $M_1(\alpha)$  и  $\eta$  будут намного больше тех результатов, которые приведены в таблице.

Рассмотрим карданную передачу с двумя шарнирами на рис. 7–9.

В [3] приведено соотношение (12) для определения угла поворота ведомого вала в двухшарнирной карданной передаче:

$$\beta' = \arctag \left( \frac{\cos \gamma_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \psi)}{\cos \gamma_1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \psi + \cos^2 \gamma_2 \cdot \operatorname{tg} \psi (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \psi \cdot \cos \gamma_1)} \right), \quad (12)$$

где  $\alpha$  – угол поворота вала I;  $\beta'$  – угол поворота вала III;  $\gamma_1$  – угол излома вала I;  $\gamma_2$  – угол излома вала III;  $\psi$  – угол между вилками 2 и 1', расположенными на валу II (см. рисунок 9).

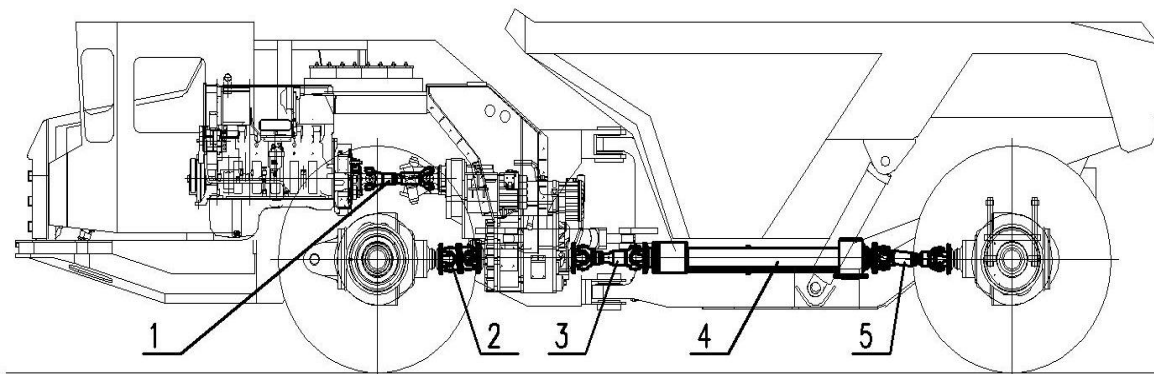


Рис. 7 – Подземный самосвал БелАЗ-75800: 1 – карданный вал коробки передач,  $J=11,75$  кг.мм<sup>2</sup>; 2 – карданный вал переднего моста,  $J=27,34$  кг.мм<sup>2</sup>; 3 – карданный вал без промежуточной опоры (промопора),  $J=23,36$  кг.мм<sup>2</sup>; 4 – промопора; 5 – карданный вал заднего моста,  $J=23,36$  кг.мм<sup>2</sup>

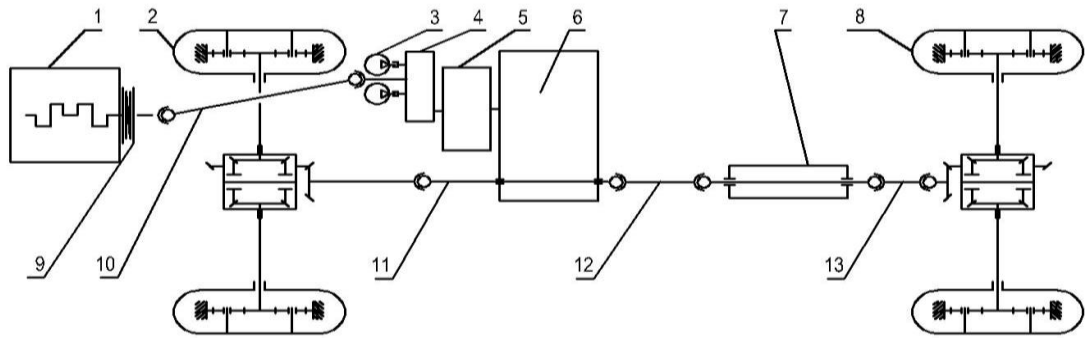


Рис. 8 – Кинематическая схема трансмиссии подземного самосвала БелАЗ-75800:  
 1 – ДВС; 2 – мост передний; 3 – насосы рулевого управления; 4 – передача согласующая; 5 – гидротрансформатор; 6 – коробочка передач; 7 – промопора; 8 – мост задний; 9 – муфта демпферная; 10 – карданный вал коробки передач,  $J=11,75 \text{ кг}\cdot\text{мм}^2$ ; 11 – карданный вал переднего моста,  $J=27,34 \text{ кг}\cdot\text{мм}^2$ ; 12 – карданный вал,  $J=23,36 \text{ кг}\cdot\text{мм}^2$ ; 13 – карданный вал заднего моста,  $J=23,36 \text{ кг}\cdot\text{мм}^2$

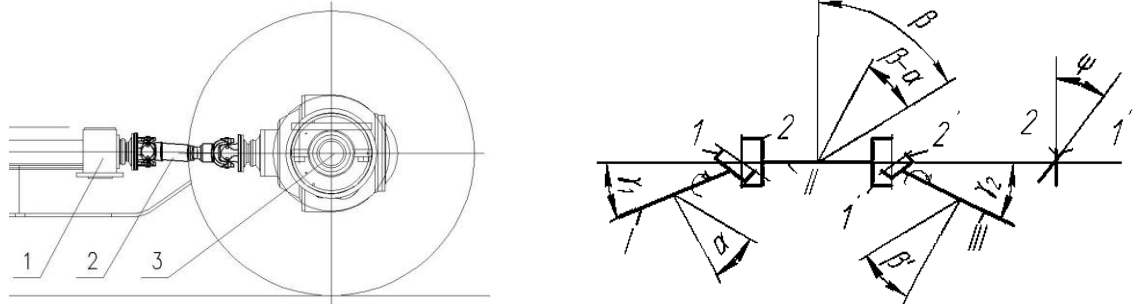


Рис. 9 – Схема двухшарнирной карданной передачи с обозначением углов: 1 – опора; 2 – карданный вал; 3 – задний мост с колесами; углы –  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\psi$

Угол  $\beta'$  является функцией двух переменных  $\alpha$ ,  $\gamma_2$ . Поэтому, полная производная по времени от (12) представляет собой сумму двух слагаемых

$$\frac{d\beta'}{dt} = \frac{\partial\beta'}{\partial\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial\beta'}{\partial\gamma_2} \cdot \frac{d\gamma_2}{dt} \quad (13)$$

Найдем частные производные  $\frac{\partial\beta'}{\partial\alpha}$ ,  $\frac{\partial\beta'}{\partial\gamma_2}$  в (13):

$$\begin{aligned} \frac{\partial\beta'}{\partial\alpha} = & \frac{\cos\gamma_2 \cdot (1 + \text{tg}^2\alpha) \cdot \frac{1 + \text{tg}^2\psi}{\cos\gamma_1 - \text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\psi + \cos^2\gamma_2 \cdot \text{tg}\psi \cdot (\text{tg}\alpha + \text{tg}\psi \cdot \cos\gamma_1)}}{1 + \cos^2\gamma_2 \cdot \text{tg}^2\alpha \cdot \frac{(1 + \text{tg}^2\psi)^2}{[\cos\gamma_1 - \text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\psi + \cos^2\gamma_2 \cdot \text{tg}\psi \cdot (\text{tg}\alpha + \text{tg}\psi \cdot \cos\gamma_1)]^2}} + \\ & + \frac{-\cos\gamma_2 \cdot \text{tg}\alpha \cdot \frac{1 + \text{tg}^2\psi}{[\cos\gamma_1 - \text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\psi + \cos^2\gamma_2 \cdot \text{tg}\psi \cdot (\text{tg}\alpha + \text{tg}\psi \cdot \cos\gamma_1)]^2} \cdot [-(1 + \text{tg}^2\alpha) \cdot \text{tg}\psi + \cos^2\gamma_2 \cdot \text{tg}\psi \cdot (1 + \text{tg}^2\alpha)]}{1 + \cos^2\gamma_2 \cdot \text{tg}^2\alpha \cdot \frac{(1 + \text{tg}^2\psi)^2}{[\cos\gamma_1 - \text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\psi + \cos^2\gamma_2 \cdot \text{tg}\psi \cdot (\text{tg}\alpha + \text{tg}\psi \cdot \cos\gamma_1)]^2}} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \beta'}{\partial \gamma_2} = \frac{-\sin \gamma_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}{\cos \gamma_1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \psi + \cos^2 \gamma_2 \cdot \operatorname{tg} \psi \cdot (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \psi \cdot \cos \gamma_1)}}{1 + \cos^2 \gamma_2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \psi)^2}{[\cos \gamma_1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \psi + \cos^2 \gamma_2 \cdot \operatorname{tg} \psi \cdot (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \psi \cdot \cos \gamma_1)]^2}} +$$

$$+ \frac{2 \cdot \cos^2 \gamma_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}{[\cos \gamma_1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \psi + \cos^2 \gamma_2 \cdot \operatorname{tg} \psi \cdot (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \psi \cdot \cos \gamma_1)]^2} \cdot \operatorname{tg} \psi \cdot (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \psi \cdot \cos \gamma_1) \cdot \sin \gamma_2}{1 + \cos^2 \gamma_2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \psi)^2}{[\cos \gamma_1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \psi + \cos^2 \gamma_2 \cdot \operatorname{tg} \psi \cdot (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \psi \cdot \cos \gamma_1)]^2}};$$

Введем замены:

$$L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) = \frac{\partial \beta'}{\partial \alpha}, \quad L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) = \frac{\partial \beta'}{\partial \gamma_2}, \quad \omega_3 = \frac{d\beta'}{dt} \text{ – угловая скорость вращения вала}$$

III;  $\omega_1 = \frac{d\alpha}{dt}$  – угловая скорость вала I;  $\omega_{\gamma_2} = \frac{d\gamma_2}{dt}$  – угловая скорость оси III при переменном угле  $\gamma_2$ .

Выражение (13) перепишем в виде:

$$\omega_3 = \omega_1 \cdot L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) + \omega_{\gamma_2} \cdot L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi). \quad (14)$$

Определим угловое ускорение ведомого вала  $\varepsilon_3$ , взяв полную производную по времени от левой и правой частей выражения (14):

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \varepsilon_1 \cdot L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) + \omega_1 \cdot \left( \frac{\partial L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)}{\partial \alpha} \cdot \omega_1 + \frac{\partial L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)}{\partial \gamma_2} \cdot \omega_{\gamma_2} \right) +$$

$$+ \varepsilon_{\gamma_2} \cdot L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) + \omega_{\gamma_2} \cdot \left( \frac{\partial L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)}{\partial \alpha} \cdot \omega_1 + \frac{\partial L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)}{\partial \gamma_2} \cdot \omega_{\gamma_2} \right), \quad (15)$$

где  $\varepsilon_1$  – угловое ускорение вала I;  $\varepsilon_{\gamma_2}$  – угловое ускорение оси III.

Для анализа выражения (9) необходимо рассмотреть четыре случая.

1. Первый –  $\varepsilon_1 = 0$ ,  $\omega_{\gamma_2} = 0$ .
2. Второй –  $\varepsilon_1 = 0$ ,  $\omega_{\gamma_2} \neq 0$ .
  - 2.1 Случай равномерного вращения –  $\varepsilon_{\gamma_2} = 0$ ;
  - 2.2 Случай неравномерного вращения –  $\varepsilon_{\gamma_2} \neq 0$ .
3. Третий –  $\varepsilon_1 \neq 0$ ,  $\omega_{\gamma_2} = 0$ .
4. Четвертый –  $\varepsilon_1 \neq 0$ ,  $\omega_{\gamma_2} \neq 0$ .
  - 4.1  $\varepsilon_{\gamma_2} = 0$ ;
  - 4.2  $\varepsilon_{\gamma_2} \neq 0$ .

В качестве примера рассмотрим четвертый случай.

**Четвертый случай.** Угловое ускорение входного вала  $\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} \neq 0$  (входной вал вращается неравномерно), угловая скорость оси III  $\omega_{\gamma_2} = \frac{d\gamma_2}{dt} \neq 0$  (при переменном угле  $\gamma_2$  ось III подвижна).

В этом случае выражение (15) примет вид (16):



$$\begin{aligned} \varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = & \varepsilon_1 \cdot L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) + \omega_1 \cdot \left( \frac{\partial L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)}{\partial \alpha} \cdot \omega_1 + \frac{\partial L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)}{\partial \gamma_2} \cdot \omega_{\gamma_2} \right) + \\ & + \varepsilon_{\gamma_2} \cdot L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) + \omega_{\gamma_2} \cdot \left( \frac{\partial L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)}{\partial \alpha} \cdot \omega_1 + \frac{\partial L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)}{\partial \gamma_2} \cdot \omega_{\gamma_2} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

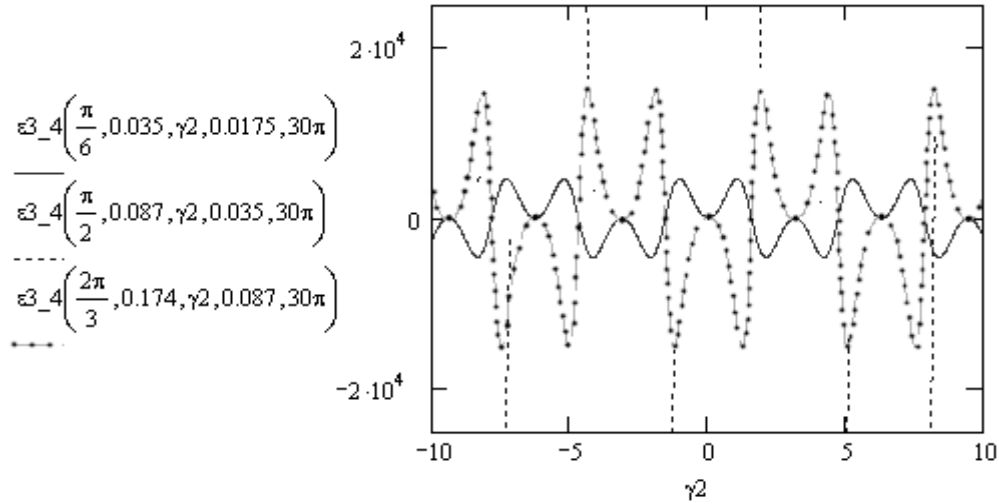


Рис. 10 – График зависимости углового ускорения  $\varepsilon_{3\_4}$  в функции угла излома  $\gamma_2$  при различных значениях угла  $\alpha$ :  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ;  $\frac{\pi}{2}$ ;  $\frac{2\pi}{3}$ ; угла  $\gamma_1$ :  $\gamma_1 = 0,035$ ;  $0,087$ ;  $0,174$  рад ( $2^\circ$ ;  $5^\circ$ ;  $10^\circ$ ) и угла  $\psi$ :  $\psi = 0,0175$ ;  $0,035$ ;  $0,087$  рад ( $1^\circ$ ;  $2^\circ$ ;  $5^\circ$ )

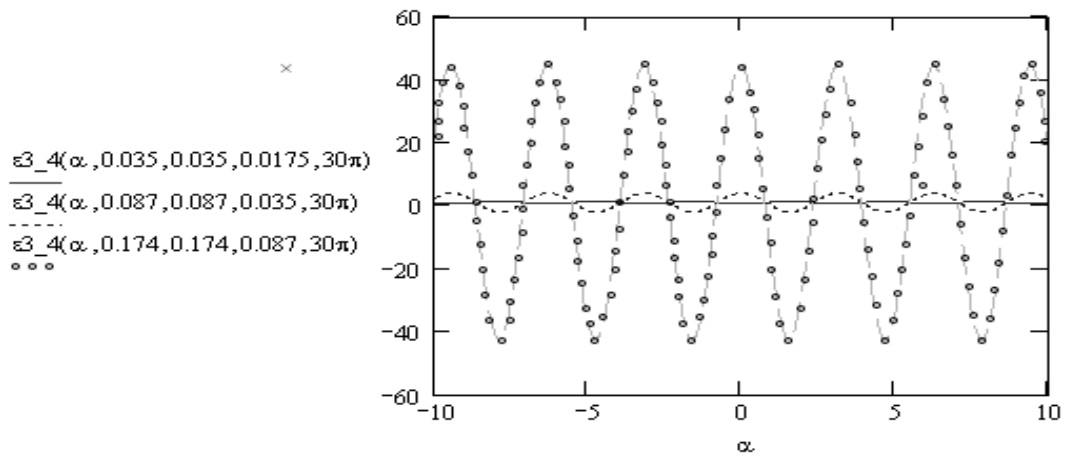


Рис. 11 – График зависимости углового ускорения  $\varepsilon_{3\_4}$  в функции угла  $\alpha$  при различных значениях угла  $\gamma_1$ :  $\gamma_1 = 0,035$ ;  $0,087$ ;  $0,174$  рад ( $2^\circ$ ;  $5^\circ$ ;  $10^\circ$ ); угла  $\gamma_2$ :  $\gamma_2 = 0,035$ ;  $0,087$ ;  $0,174$  рад ( $2^\circ$ ;  $5^\circ$ ;  $10^\circ$ ) и угла  $\psi$ :  $\psi = 0,0175$ ;  $0,035$ ;  $0,087$  рад ( $1^\circ$ ;  $2^\circ$ ;  $5^\circ$ )

Величина углового ускорения выходного вала III карданной передачи сильно зависит от двух углов: от угла излома вала III –  $\gamma_2$ ; от угла между вилками 2 и 1', расположенными на валу II –  $\psi$  (см. рис. 2).

Угловое ускорение вала III в функции двух углов создает дополнительный вращающий момент  $M_2 = M_2(\gamma_2, \psi)$  на ведущих колесах автомобиля, который

вращающимся колесам придает ещё и осциллирующее движение относительно их осей вращения

$$M_2(\gamma_2, \psi) = I_x \cdot \varepsilon_3.$$

В результате суммарный момент  $M_2$  на колесе примет вид (17):

$$M_2 = M_{кр} + M_2(\gamma_2, \psi), \quad (17)$$

где  $M_{кр}$  – крутящий момент на входном валу вилки кардана (см. рис. 2).

Знание величины углового ускорения вала III в функции двух углов позволяет проводить расчеты, связанные с динамикой деталей трансмиссии и колес автомобиля.

Заключение. В работе получены следующие результаты:

1. Формализованы зависимости углового ускорения выходных валов карданных передач:  $\varepsilon_2$  вала II (рис. 2) в функции угла излома –  $\alpha$ ;  $\varepsilon_3$  вала III (рис. 9) в функции двух углов –  $\gamma_2, \psi$  (в литературе таких зависимостей нет).

2. Определены дополнительные вращающие моменты:  $M_1(\alpha)$  в функции углового ускорения  $\varepsilon_2$  и угла излома  $\alpha$  (для одношарнирной карданной передачи);  $M_2(\gamma_2, \psi)$  в функции углового ускорения  $\varepsilon_3$  и двух углов –  $\gamma_2, \psi$  (для двухшарнирной карданной передачи).

Выводы. Дополнительные вращающие моменты: вращающимся колесам с шинами сообщают колебательные движения относительно их осей вращения; у различных конструкций машин при определенных режимах работы и на разных передачах могут достигать значительных величин; генерируют вибрации деталей трансмиссии, колес и машины в целом, что уменьшает срок службы транспортного средства.

При проектировании колесного транспортного средства необходимо:

во-первых, рассчитать величины углового ускорения  $\varepsilon_2$  в функции угла излома  $\alpha$  одношарнирной карданной передачи,  $\varepsilon_3$  в функции двух углов –  $\gamma_2, \psi$  двухшарнирной карданной передачи и дополнительных вращающих моментов  $M_1(\alpha)$  и  $M_2(\gamma_2, \psi)$  на разных передачах;

во-вторых, выполнить расчеты, связанные с выбором схемы и с нагрузочными режимами карданных передач, с динамикой деталей трансмиссии, колес и автомобиля в целом.

Ввести результаты данных исследований в курсы лекций и практических занятий для студентов и курсантов технических вузов по дисциплинам «Конструирование и расчет деталей транспортных средств» и «Теория мобильных машин».

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский, Л.Г. Курс теоретической механики: В 2-х томах. Т.1. Статика и кинематика // Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье / М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 352 с.
2. Лойцянский, Л.Г. Курс теоретической механики: В 2-х томах. Т.2. Динамика // Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье / М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 640 с.
3. Малаховский, Я.Э. Карданные передачи // Я.Э. Малаховский, А.А. Лапин, Н.К. Веденев / М.: 1962. – 155с.
4. Артоболевский, И.И. Теория механизмов и машин // И.И. Артоболевский / М.: «Наука» 1988. – 639с.
5. Островерхов, Н.Л. Динамическая нагруженность трансмиссий колесных машин // Н.Л. Островерхов, И.К. Русецкий, Л.И. Бойко / Мн.: Наука и техника. – 1977. – 191с.
6. Проектирование универсальных шарниров и ведущих мостов. Пер. с англ. Ю.В. Попова. – Л.: Машиностроение. – 1984. – 463 с.
7. Бойко, Л.И. Механика приводов колеблющихся рабочих органов машин // Л.И. Бойко / – Мн.: ООО «Мэджик Бук». – 2003. – 239 с.