Гурвич Юрий Абрамович (Gurvich Yuriy Abramovich): *Республика Беларусь, г. Минск, Белорусский Национальный Технический Университет, кандидат технических наук, доцент кафедры “Теоретическая механика”, доцент*

Августинович Анна Геннадьевна (Avgustinovich Anna Gennadevna): *Республика Беларусь, г. Минск, Белорусский Национальный Технический Университет, кафедра “Теоретическая механика”*

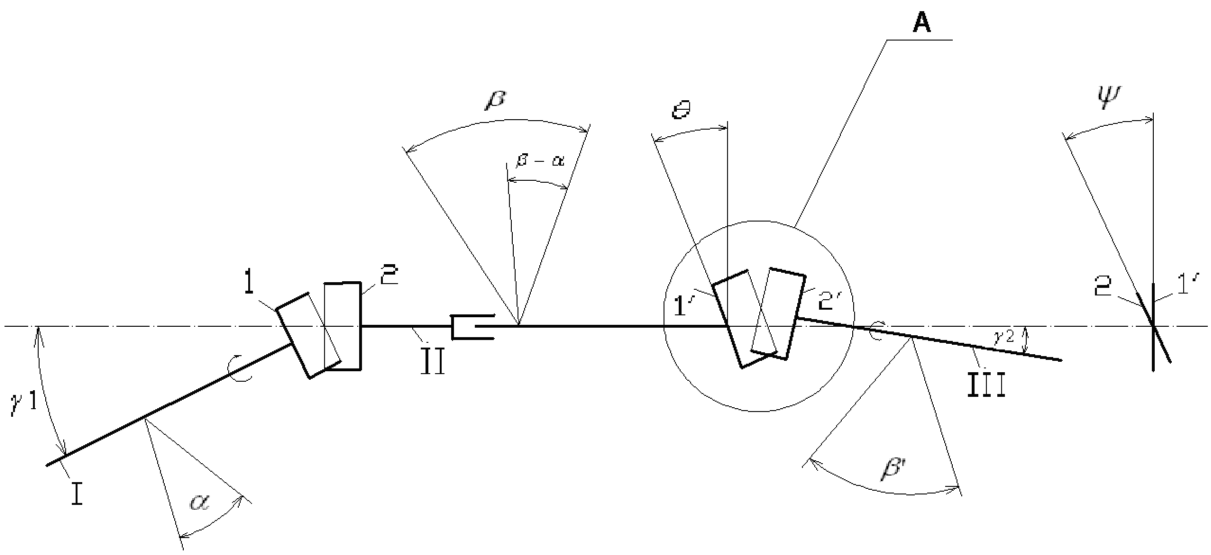
Анализ кинематических характеристик двухшарнирной карданной передачи с тремя углами излома

be_need@mail.ru

УДК 621.825.63

Исследований, посвященных изучению вопроса о неравномерности вращения вала, которая возникает из-за угла излома в карданной передаче, в литературе приведено недостаточно. В отличие от [1-6] в данной работе впервые сделана попытка провести исследование кинематических характеристик для двухшарнирной карданной передачи с тремя углами излома: γ_2, ψ, θ.

Рассмотрим случай, когда вилка 1′ повернута относительно вилки 2 на угол ψ. В свою очередь вилка 1′ повернута относительно вилки 2 в плоскости рисунка на угол θ.



А-А

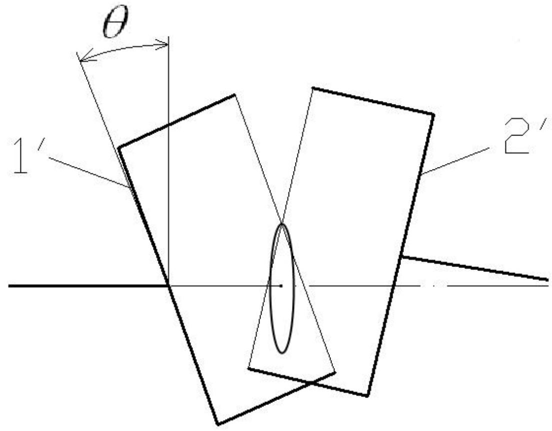


Рис. 1. Схема карданной передачи с двумя шарнирами и обозначением углов: α - угол поворота вала I; β' - угол поворота вала III; γ_1 - угол излома вала I; γ_2 - угол излома вала III; ψ - угол между вилками 1' и 2, расположенными на валу II; θ – угол излома между вилками 1' и 2

В [4] приведено соотношение для определения угла поворота ведомого вала в двухшарнирной карданной передаче:

$$\beta' = arctag\left[\frac{\cos\gamma_2 \cdot tg\alpha(1+tg^2\psi)}{\cos\gamma_1 - tg\alpha \cdot tg\psi + \cos^2\gamma_2 \cdot tg\psi(tg\alpha + tg\psi \cdot \cos\gamma_1)}\right] \qquad (1)$$

С учетом угла излома θ выражение (1) примет вид:

$$\beta' = arctag\left[\frac{\cos(\gamma_2+\theta) \cdot tg\alpha\left(1+tg^2\psi\right)}{\cos\gamma_1 - tg\alpha \cdot tg\psi + \cos^2\left(\gamma_2+\theta\right) \cdot tg\psi\left(tg\alpha + tg\psi \cdot \cos\gamma_1\right)}\right], \qquad (2)$$

где θ – угол излома между вилками 1' и 2.

Угол β' является функцией двух переменных α и $\gamma 2$. Следовательно, полная производная по времени от β' будет представлять собой сумму двух слагаемых:

$$\frac{d\beta'}{dt} = \frac{\partial\beta'}{\partial\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial\beta'}{\partial\gamma_2} \cdot \frac{d\gamma_2}{dt}. \qquad (3)$$

Найдем частные производные $\frac{\partial\beta'}{\partial\alpha}$ и $\frac{\partial\beta'}{\partial\gamma_2}$:

$$\frac{\partial\beta'}{\partial\alpha} = \frac{\cos\left(\gamma_2+\theta\right) \cdot \left(1+tg^2\alpha\right) \cdot \frac{1+tg^2\psi}{\cos\gamma_1 - tg\alpha \cdot tg\psi + \cos^2\left(\gamma_2+\theta\right) \cdot tg\psi\left(tg\alpha + tg\psi \cdot \cos\gamma_1\right)}}{1+\cos^2\left(\gamma_2+\theta\right) \cdot tg^2\alpha \cdot \frac{\left(1+tg^2\psi\right)^2}{\left(\cos\gamma_1 - tg\alpha \cdot tg\psi + \cos^2\left(\gamma_2+\theta\right) \cdot tg\psi\left(tg\alpha + tg\psi \cdot \cos\gamma_1\right)\right)^2}} -$$

$$- \frac{\cos\left(\gamma_2+\theta\right) \cdot tg\alpha \cdot \frac{(1+tg^2\psi) \cdot \left[\left[-\left(1+tg^2\alpha\right)\right] \cdot tg\psi + \cos^2\left(\gamma_2+\theta\right) \cdot tg\psi \cdot \left(1+tg^2\alpha\right)\right]}{\cos\gamma_1 - tg\alpha \cdot tg\psi + \cos^2\left(\gamma_2+\theta\right) \cdot tg\psi\left(tg\alpha + tg\psi \cdot \cos\gamma_1\right)}}{1+\cos^2\left(\gamma_2+\theta\right) \cdot tg^2\alpha \cdot \frac{\left(1+tg^2\psi\right)^2}{\left(\cos\gamma_1 - tg\alpha \cdot tg\psi + \cos^2\left(\gamma_2+\theta\right) \cdot tg\psi\left(tg\alpha + tg\psi \cdot \cos\gamma_1\right)\right)^2}};$$

$$\frac{\partial\beta'}{\partial\gamma_2}=\frac{-\sin(\gamma_2+\theta)\cdot tg\alpha\cdot\dfrac{1+tg^2\psi}{\cos\gamma_1-tg\alpha\cdot tg\psi+\cos^2(\gamma_2+\theta)\cdot tg\psi(tg\alpha+tg\psi\cdot\cos\gamma_1)}}{1+\cos^2(\gamma_2+\theta)\cdot tg^2\alpha\cdot\dfrac{(1+tg^2\psi)^2}{(\cos\gamma_1-tg\alpha\cdot tg\psi+\cos^2(\gamma_2+\theta)\cdot tg\psi(tg\alpha+tg\psi\cdot\cos\gamma_1))^2}}+$$

$$+\frac{2\cdot\cos^2(\gamma_2+\theta)\cdot tg\alpha\cdot\dfrac{(1+tg^2\psi)\cdot\left[tg\psi\cdot(tg\alpha+tg\psi\cdot\cos\gamma_1)\cdot\sin(\gamma_2+\theta)\right]}{\cos\gamma_1-tg\alpha\cdot tg\psi+\cos^2(\gamma_2+\theta)\cdot tg\psi(tg\alpha+tg\psi\cdot\cos\gamma_1)}}{1+\cos^2(\gamma_2+\theta)\cdot tg^2\alpha\cdot\dfrac{(1+tg^2\psi)^2}{(\cos\gamma_1-tg\alpha\cdot tg\psi+\cos^2(\gamma_2+\theta)\cdot tg\psi(tg\alpha+tg\psi\cdot\cos\gamma_1))^2}};$$

Введем замены:

$L1(\alpha,\gamma 1,\gamma 2,\psi,\theta)=\dfrac{\partial\beta'}{\partial\alpha}$, $L2(\alpha,\gamma 1,\gamma 2,\psi,\theta)=\dfrac{\partial\beta'}{\partial\gamma 2}$, $\omega_3=\dfrac{d\beta'}{dt}$ - угловая скорость вала III; $\omega_1=\dfrac{d\alpha}{dt}$ - угловая скорость вала I; $\omega_{\gamma 2}=\dfrac{d\gamma 2}{dt}$ - угловая скорость при перемещении оси III от изначального положения.

Выражение для угловой скорости запишем в виде:

$$\omega_3=\omega_1\cdot L1(\alpha,\gamma 1,\gamma 2,\psi,\theta)+\omega_{\gamma 2}\cdot L2(\alpha,\gamma 1,\gamma 2,\psi,\theta) \qquad (4)$$

Определим угловое ускорение ведомого вала ε_3, взяв полную производную по времени от левой и правой частей выражения (4):

$$\varepsilon_3=\frac{d\omega_3}{dt}=\varepsilon_1\cdot L1(\alpha,\gamma 1,\gamma 2,\psi,\theta)+\omega_1\cdot\left(\frac{\partial L1(\alpha,\gamma 1,\gamma 2,\psi,\theta)}{\partial\alpha}\cdot\omega_1+\frac{\partial L1(\alpha,\gamma 1,\gamma 2,\psi,\theta)}{\partial\gamma 2}\cdot\omega_{\gamma 2}\right)+$$

$$+\varepsilon_{\gamma 2}\cdot L2(\alpha,\gamma 1,\gamma 2,\psi,\theta)+\omega_{\gamma 2}\cdot\left(\frac{\partial L2(\alpha,\gamma 1,\gamma 2,\psi,\theta)}{\partial\alpha}\cdot\omega_1+\frac{\partial L2(\alpha,\gamma 1,\gamma 2,\psi,\theta)}{\partial\gamma 2}\cdot\omega_{\gamma 2}\right),$$

(5)

где ε_1, $\varepsilon_{\gamma 2}$, - угловые ускорения валов I и III соответственно.

Для анализа выражения (5) необходимо рассмотреть четыре случая.

1. Первый случай. $\varepsilon_1=0,\ \omega_{\gamma 2}=0.$
2. Второй случай. $\varepsilon_1=0,\ \omega_{\gamma 2}\neq 0$.
   2.1 Случай равномерного вращения $\varepsilon_{\gamma 2}=0$;
   2.2 Случай неравномерного вращения $\varepsilon_{\gamma 2}\neq 0$.
3. Третий случай. $\varepsilon_1\neq 0,\ \omega_{\gamma 2}=0$.
4. Четвертый случай. $\varepsilon_1\neq 0,\ \omega_{\gamma 2}\neq 0$.
   4.1 $\varepsilon_{\gamma 2}=0$;
   4.2 $\varepsilon_{\gamma 2}\neq 0$.

Рассмотрим подробно первый случай.

Первый случай. Угловое ускорение входного вала $\varepsilon_1=\dfrac{d\omega_1}{dt}=0$ (входной вал вращается равномерно), угловая скорость при перемещении оси II от изначального положения $\omega_{\gamma 2}=\dfrac{d\gamma 2}{dt}=0$ (угол излома $\gamma 2=const$).

Выражение (5) примет вид:

$$\varepsilon_3^{(1)} = \frac{d\omega_3}{dt} = \omega_1^2 \cdot \frac{\partial L1(\alpha, \gamma 1, \gamma 2, \psi, \theta)}{\partial \alpha} \qquad (6)$$

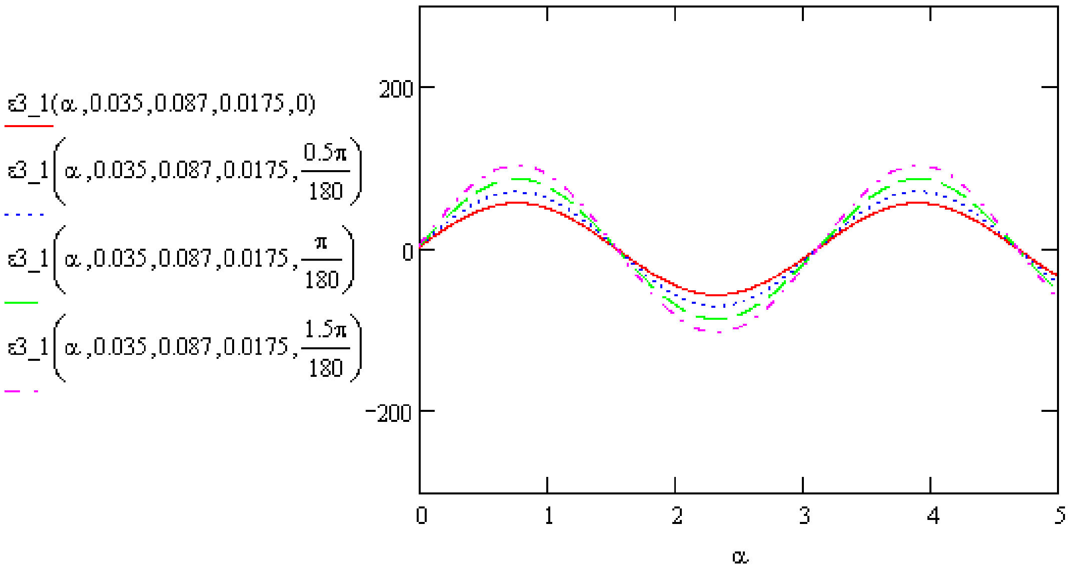


Рис. 2 - График зависимости углового ускорения $\varepsilon 31$ ($ðàä/ñ^2$) в функции угла поворота ведущего вала при значениях угла $\gamma 1 = 0,035$; *рад (2º)*, угла $\gamma 2 = 0,087$ *рад (5º)*, угла $\psi = 0,0175$; *рад (1º)* и различных значениях угла θ: *0º, 30'; 1º; 1º30'*

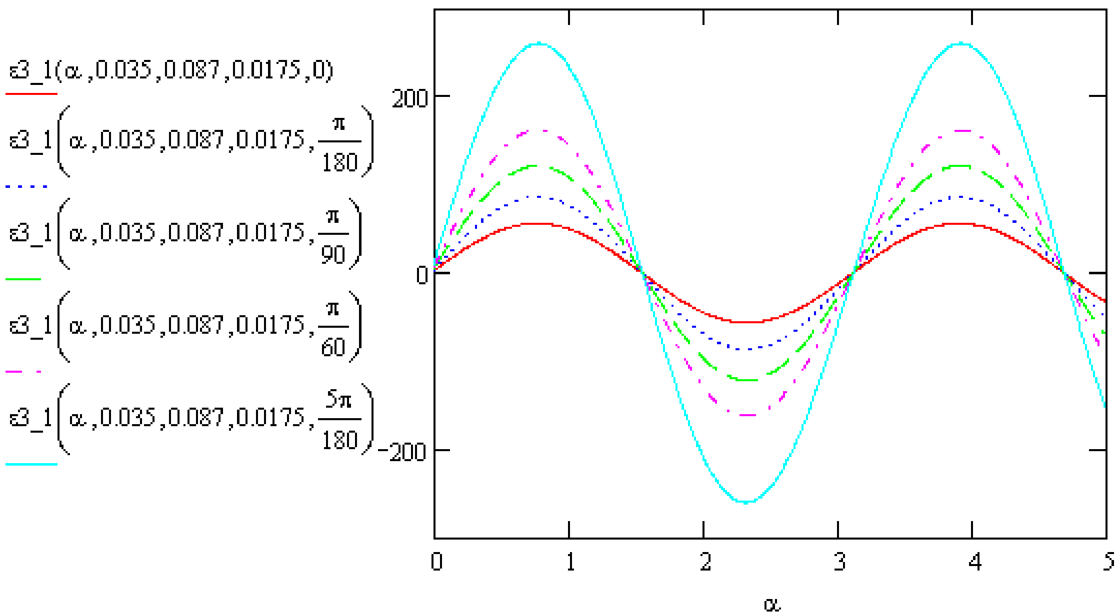


Рис. 3 - График зависимости углового ускорения $\varepsilon 31$ ($ðàä/ñ^2$) в функции угла поворота ведущего вала при значениях угла $\gamma 1 = 0,035$; *рад (2º)*, угла $\gamma 2 = 0,087$ *рад (5º)*, угла $\psi = 0,0175$; *рад (1º)* и различных значениях угла θ: *0º; 1º; 2º; 3º; 5º*

ЛИТЕРАТУРА

1. Бойко Л. И. Механика приводов колеблющихся рабочих органов машин. – Мн.: ООО «Мэджик Бук», 2003. – 239с.
2. Гурвич Ю. А., Сафронов К. И., Пащенко А. В. Анализ кинематических характеристик карданных передач. – Мн.: БНТУ.
3. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики. – М.: 1954г. - 379с.
4. Малаховский Я. Э., Лапин А. А.. Карданные передачи. – М.: Машгиз, 1962. - 153с.
5. Островерхов Н. Л., Русецкий И. К., Бойко Л. И. Динамическая нагруженность трансмиссий колесных машин. – Мн.: Наука и техника, 1977. – 191с.
6. Проектирование универсальных шарниров и ведущих мостов. Пер. с англ. Ю.В. Попова. – Л.: Машиностроение, 1984. – 463 с.