

**Гурвич Юрий Абрамович (Gurvich Yuriy Abramovich):** Республика Беларусь, г. Минск, Белорусский Национальный Технический Университет, кандидат технических наук, доцент кафедры “Теоретическая механика”, доцент

**Вареник Анна Александровна (Varenik Anna Aleksandrovna):** Республика Беларусь, г. Минск, Белорусский Национальный Технический Университет, кафедра «Теоретическая механика»

## **Анализ кинематических характеристик одно- и двухшарнирной карданных передач в трансмиссии транспортного средства**

[anna.varenik@gmail.com](mailto:anna.varenik@gmail.com)

УДК 621.825.63

Карданная передача состоит из карданного шарнира, вала и промежуточных опор и применяется для передачи крутящего момента между валами механизмов трансмиссии, расположенными под постоянными или переменными углами. Она служит также для компенсации несоосности валов между закрепленными на раме агрегатами.

Карданная передача обладает существенным недостатком, заключающемся в неравномерности вращения выходного вала, возникающей из-за угла излома. Эта неравномерность оказывает негативное влияние на выходные характеристики карданных передач и механизмов трансмиссии. Тем не менее, исследований, посвященных изучению этого важного вопроса, в литературе приведено недостаточно [1-6].

В данной работе сделана попытка провести более полное исследование кинематических характеристик одношарнирной (по сравнению с [2]) и, по всей видимости, впервые для двухшарнирной карданных передач с переменным углом излома, что позволит, в дальнейшем, на стадии проектирования машины обосновать выбор схемы карданной передачи с приемлемой для практики величиной неравномерности вращения выходного вала.

Рассмотрим трансмиссию транспортного средства, где мощность от коробки передач к ведущему мосту передается посредством одношарнирной карданной передачи, которая в процессе движения машины может изменять свое первоначальное положение.

Для одношарнирной карданной передачи, например в [4], получена зависимость для угла поворота ведомого вала  $\beta$  в функции двух углов: угла поворота ведущего вала  $\alpha$  и угла излома  $\gamma$  (рисунок 1):

$$\beta = \arctg\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\gamma}\right), \quad (1)$$

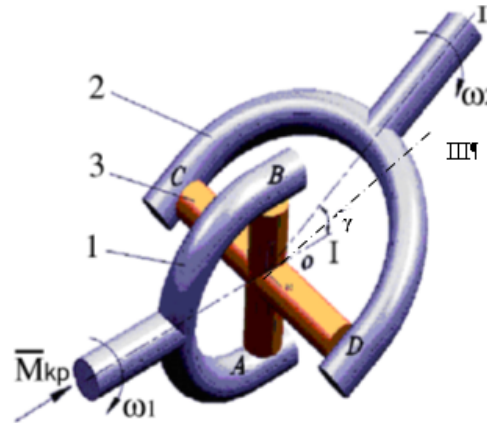


Рис. 1. Кинематическая схема карданного шарнира: 1, 2 – вилки; 3 – крестовина; I – ось вращения вилки I; II – ось вращения вилки 2;  $\gamma$  - угол между осями I и II; III – новое положение оси вращения вилки 2 при переменном угле  $\gamma$ ;  $\omega_1$  и  $\omega_2$  - угловые скорости ведущего и ведомого валов

При заданном положении ведущего звена, определяемом углом  $\alpha$ , положение ведомого звена полностью определяется формулой (1).

Дифференцируя соотношение (1) по времени, имеем:

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial\beta}{\partial\alpha} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial\beta}{\partial\gamma} \frac{d\gamma}{dt},$$

где  $\frac{d\alpha}{dt} = \omega_1$ ,  $\frac{d\beta}{dt} = \omega_2$  и  $\frac{d\gamma}{dt} = \omega_\gamma$  - угловые скорости, соответственно, ведущего, ведомого валов и ведомого вала при переменном угле  $\gamma$ ;

$$\frac{\partial\beta}{\partial\alpha} = \frac{\cos\gamma}{1 - \sin^2\gamma \cos^2\alpha}, \quad \frac{\partial\beta}{\partial\gamma} = \frac{\sin\alpha \cos\alpha \sin\gamma}{1 - \sin^2\gamma \cos^2\alpha}.$$

Тогда соотношение для скорости вращения ведомого вала примет вид:

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{\cos\gamma}{1 - \sin^2\gamma \cos^2\alpha} + \omega_\gamma \frac{\sin\alpha \cos\alpha \sin\gamma}{1 - \sin^2\gamma \cos^2\alpha}. \quad (2)$$

В выражении (2) введем замену:

$$K1(\alpha, \gamma) = \frac{\cos\gamma}{1 - \sin^2\gamma \cos^2\alpha}, \quad K2(\alpha, \gamma) = \frac{\sin\alpha \cos\alpha \sin\gamma}{1 - \sin^2\gamma \cos^2\alpha}. \quad (3)$$

Иначе

$$\omega_2 = \omega_1 K1(\alpha, \gamma) + \omega_\gamma K2(\alpha, \gamma). \quad (4)$$

Определим угловое ускорение ведомого вала  $\varepsilon_2$ , взяв полную производную по времени от левой и правой частей выражения (4):

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \varepsilon_1 \frac{\partial \omega_1(\alpha, \gamma)}{\partial \alpha} + \omega_1 \frac{\partial \omega_1(\alpha, \gamma)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \omega_1(\alpha, \gamma)}{\partial \gamma} \omega_\gamma + \varepsilon_\gamma \frac{\partial \omega_2(\alpha, \gamma)}{\partial \alpha} + \omega_\gamma \frac{\partial \omega_2(\alpha, \gamma)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \omega_2(\alpha, \gamma)}{\partial \gamma} \omega_\gamma, \quad (5)$$

где  $\omega_1 = \frac{d\alpha}{dt}$  - угловая скорость ведущего вала;  $\varepsilon_1$  - угловое ускорение ведущего вала;  $\omega_\gamma = \frac{d\gamma}{dt}$  - угловая скорость ведомого вала 2 при повороте на угол  $\gamma$ ;  $\varepsilon_\gamma$  - угловое ускорение ведомого вала 2 при повороте на угол  $\gamma$  (см. рисунок 1).

Для анализа выражения (5) необходимо рассмотреть кинематические зависимости в шести случаях подобно тому, как это было сделано в [2].

Теперь рассмотрим карданную передачу с двумя шарнирами, представленную на рис. 2.

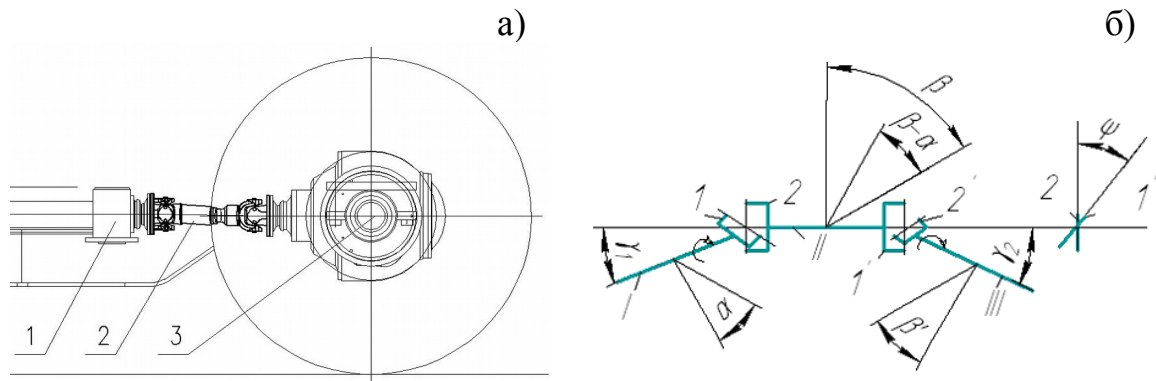


Рис. 2. Схема установки двухшарнирной карданной передачи на машине (а) и с обозначением углов (б): 1 – опора; 2 – карданный вал; 3 – задний мост с колесами

В [4] приведено соотношение для определения угла поворота ведомого вала в двухшарнирной карданной передаче:

$$\beta = \arctan \frac{\cos \gamma_2 \operatorname{tg} \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \psi)}{\cos \gamma_1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \psi + \cos^2 \gamma_2 \operatorname{tg} \psi (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \psi \cos \gamma_1)} \quad (6)$$

где  $\alpha$  - угол поворота вала I;  $\beta$  - угол поворота вала III;  $\gamma_1$  - угол излома вала I;  $\gamma_2$  - угол излома вала III;  $\psi$  - угол между вилками 2 и 1', расположенными на валу II.

Угол  $\beta$  является функцией двух переменных  $\alpha$ ,  $\gamma_2$ . Поэтому, полная производная по времени от (6) представляет собой сумму двух слагаемых

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial \beta}{\partial \gamma_2} \frac{d\gamma_2}{dt}. \quad (7)$$

Найдем частные производные  $\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}$ ,  $\frac{\partial \beta}{\partial \gamma_2}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} &= \frac{\cos \gamma_2 \sin \alpha + \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha}{1 + \cos^2 \gamma_2 \sin^2 \alpha} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}{(1 + \operatorname{tg}^2 \psi)^2} + \\ &+ \frac{-\cos \gamma_2 \sin \alpha}{1 + \cos^2 \gamma_2 \sin^2 \alpha} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}{(1 + \operatorname{tg}^2 \psi)^2} \frac{\cos \gamma_1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \psi + \cos^2 \gamma_2 \operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \psi \cos \gamma_1}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \operatorname{tg} \psi + \cos^2 \gamma_2 \operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \psi \cos \gamma_1}; \\ \frac{\partial \beta}{\partial \gamma_2} &= \frac{-\sin \gamma_2 \sin \alpha}{1 + \cos^2 \gamma_2 \sin^2 \alpha} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}{(1 + \operatorname{tg}^2 \psi)^2} + \\ &+ \frac{2 \cos^2 \gamma_2 \sin \alpha}{1 + \cos^2 \gamma_2 \sin^2 \alpha} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}{(1 + \operatorname{tg}^2 \psi)^2} \frac{\operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \psi \cos \gamma_1}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \operatorname{tg} \psi + \cos^2 \gamma_2 \operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \psi \cos \gamma_1}; \end{aligned}$$

Введем замены:

$L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) = \frac{\partial \beta}{\partial \alpha}$ ,  $L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) = \frac{\partial \beta}{\partial \gamma_2}$ ,  $\omega_3 = \frac{d\beta}{dt}$  - угловая скорость вращения вала III;  $\omega_1 = \frac{d\alpha}{dt}$  - угловая скорость вала I;  $\omega_{\gamma_2} = \frac{d\gamma_2}{dt}$  - угловая скорость оси III при переменном угле  $\gamma_2$ .

Выражение (7) перепишем в виде:

$$\omega_3 = \omega_1 L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) + \omega_{\gamma_2} L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi). \quad (8)$$

Определим угловое ускорение ведомого вала  $\varepsilon_3$ , взяв полную производную по времени от левой и правой частей выражения (8):

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} &= \varepsilon_1 L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) + \omega_1 \frac{\partial L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)}{\partial \alpha} \omega_1 + \frac{\partial L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)}{\partial \gamma_2} \omega_{\gamma_2} + \\ &+ \varepsilon_{\gamma_2} L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) + \omega_{\gamma_2} \frac{\partial L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)}{\partial \alpha} \omega_1 + \frac{\partial L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)}{\partial \gamma_2} \omega_{\gamma_2} \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\varepsilon_1$  - угловое ускорение вала I;  $\varepsilon_{\gamma_2}$  - угловое ускорение оси III.

Для анализа выражения (9) необходимо рассмотреть четыре случая.

1. Первый -  $\varepsilon_1 = 0$ ,  $\omega_{\gamma_2} = 0$ .
2. Второй -  $\varepsilon_1 = 0$ ,  $\omega_{\gamma_2} \neq 0$ .
  - 2.1 Случай равномерного вращения  $\varepsilon_{\gamma_2} = 0$ ;
  - 2.2 Случай неравномерного вращения  $\varepsilon_{\gamma_2} \neq 0$ .
3. Третий -  $\varepsilon_1 \neq 0$ ,  $\omega_{\gamma_2} = 0$ .
4. Четвертый -  $\varepsilon_1 \neq 0$ ,  $\omega_{\gamma_2} \neq 0$ .

$$4.1 \quad \varepsilon_{\gamma_2} = 0;$$

$$4.2 \quad \varepsilon_{\gamma_2} \neq 0.$$

В качестве примера рассмотрим подробно четвертый случай.

**Четвертый случай.** Угловое ускорение входного вала  $\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt}$  (входной вал вращается неравномерно), угловая скорость оси III  $\omega_{\gamma_2} = \frac{d\gamma_2}{dt}$  (при переменном угле  $\gamma_2$  ось III подвижна).

В этом случае выражение (9) примет вид:

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \varepsilon_1 \cos^2 \alpha + \omega_1 \frac{d \cos^2 \alpha}{d\alpha} + \omega_1 \cos^2 \alpha \frac{d\alpha}{dt} + \omega_{\gamma_2} \frac{d \cos^2 \alpha}{d\gamma_2} + \omega_{\gamma_2} \cos^2 \alpha \frac{d\gamma_2}{dt} + \varepsilon_{\gamma_2} \cos^2 \alpha + \omega_{\gamma_2} \frac{d \cos^2 \alpha}{d\gamma_2} + \omega_{\gamma_2} \cos^2 \alpha \frac{d\gamma_2}{dt}. \quad (10)$$

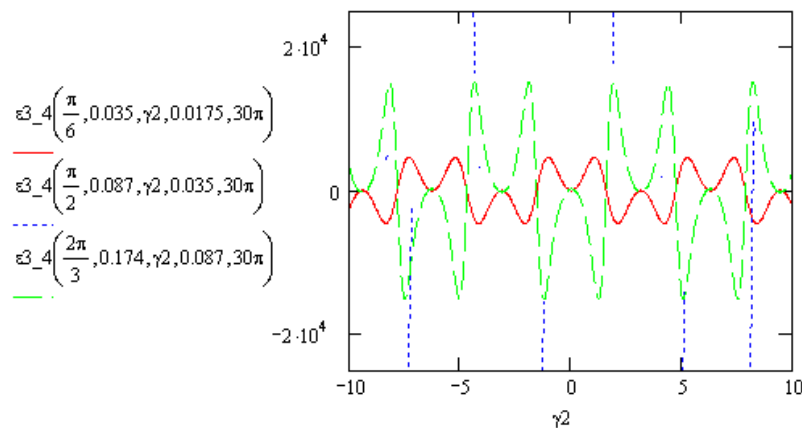


Рис. 3. График зависимости углового ускорения  $\varepsilon_{3-4}$  в функции угла

излома  $\gamma_2$  при различных значениях угла  $\alpha$ :  $\alpha = \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}$ ; угла  $\gamma_1$ :  $\gamma_1 = 0,035; 0,087; 0,174$  рад ( $2^\circ; 5^\circ; 10^\circ$ ) и угла  $\psi$ :  $\psi = 0,0175; 0,035; 0,087$  рад ( $1^\circ; 2^\circ; 5^\circ$ )

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бойко Л. И. Механика приводов колеблющихся рабочих органов машин. – Мн.: ООО «Мэджик Бук», 2003. – 239с.
2. Гурвич Ю. А., Сафронов К. И., Пашенко А. В. Анализ кинематических характеристик карданных передач. – Мн.: БНТУ.
3. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики. – М.: 1954г. - 379с.
4. Малаховский Я. Э., Лапин А. А.. Карданные передачи. – М.: Машгиз, 1962. - 153с.
5. Островерхов Н. Л., Русецкий И. К., Бойко Л. И. Динамическая нагруженность трансмиссий колесных машин. – Мн.: Наука и техника, 1977. – 191с.
6. Проектирование универсальных шарниров и ведущих мостов. Пер. с англ. Ю.В. Попова. – Л.: Машиностроение, 1984. – 463 с.