

Гурвич Юрий Абрамович (Gurvich Yuriy Abramovich):

Республика Беларусь, г. Минск, Белорусский Национальный Технический Университет, кандидат технических наук, доцент кафедры “Теоретическая механика”, доцент

Шумилов Алексей Александрович (Shumilov Alexey Alexandrovich):

Республика Беларусь, г. Минск, Белорусский Национальный Технический Университет, кафедра “Теоретическая механика”

Кислова Татьяна Евгеньевна (Kislova Tatiana Evgenievna):

Республика Беларусь, г. Минск, Белорусский Национальный Технический Университет, кафедра “Теоретическая механика”

УДК 796.912: 531.3

Биомеханика вращения фигуриста при различных видах нагружения

В [3] приведено тривиальное решение задачи об изменении угловой скорости фигуриста, выполняющего пируэт «Винт», при условии сохранения постоянным его кинетического момента относительно оси вращения (Рис.1). При этом конек касается льда одной точкой, а момент сопротивления конька о лед $M_c = 0$.

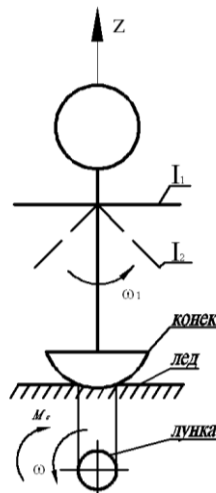


Рис. 1 Схема вращения фигуриста вокруг оси Z : I_1 , I_2 – моменты инерции фигуриста относительно оси Z с расставленными в стороны и прижатыми к туловищу руками соответственно; $\omega_1 = \omega_{t=0}$ – начальная угловая скорость, соответствующая I_1 ; ω_2 - угловая скорость, соответствующая I_2

Установим механико-математические закономерности вращения фигуриста вокруг оси Z в предположении, что конек вырезает лунку, а мо-

мент сопротивления конька о лед $M_c \neq 0$ (Рис.1). При этом даны ответы на следующие вопросы. Какова зависимость угловой скорости вращения фигуриста от времени $\omega = \omega(t)$ при изменении момента инерции фигуриста от I_1 до I_2 при различных случаях нагружения $M_c \neq 0$? Что будет происходить с $\omega = \omega(t)$, когда момент инерции фигуриста станет постоянной величиной $I_2 = \text{const}$? Какой вид закономерности $\omega = \omega(t)$ в тривиальном случае, когда фигурист из первого положения с моментом инерции I_1 переходит во второе положение с моментом инерции I_2 ?

Определим угловую скорость вращения фигуриста относительно оси Z в функции времени $\omega = \omega(t)$ при условии, что момент инерции фигуриста относительно оси Z является переменным (функцией времени) с учетом суммарного момента сопротивления воздуха вращающемуся фигуристу и его конька о лед, пропорционального угловой скорости вращения фигуриста $M_c = \alpha\omega$ (α -коэффициент пропорциональности). Суммарные силы инерции Кориолиса при движении рук фигуриста в вертикальной и горизонтальной плоскостях равны нулю.

Используя теорему об изменении кинетического момента фигуриста относительно оси z , получим:

$$\frac{dI}{dt} \omega + I \frac{d\omega}{dt} = -\alpha\omega,$$

где $I = I(t)$ - момент инерции фигуриста относительно оси Z в функции времени t . Решая это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, получим:

$$\omega = \omega_1 \frac{I_1}{I(t)} e^{-\alpha \int_{0}^t \frac{dt}{I(t)}}. \quad (1)$$

Примем, что время вращения фигуриста равно сумме времени разгона и времени торможения - $t_b = t_p + t_r$. Зададим вид функции $I = I(t)$:

$$I = I_1 - \beta t, \quad (2)$$

где $\beta = \frac{I_1 - I_2}{t_p}$; t_p -время разгона; $I_1 = I_{t=0}$; $I_2 = I_{t=t_p}$.

Теперь решение уравнения (1) с учетом формулы (2) будет иметь вид:

$$\omega = \omega_1 I_1^{(1-\frac{\alpha}{\beta})} (I_1 - \beta t)^{\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)} \quad (3)$$

Рассмотрим три случая $\frac{\alpha}{\beta} < 1$, $\frac{\alpha}{\beta} = 1$, $\frac{\alpha}{\beta} > 1$ и графически проиллюстрируем выражение (3).

$$1. \text{ Если } \frac{\alpha}{\beta} < 1 \text{ (рис. 2), тогда (3) примет вид } \omega = \omega_1 \left(\frac{I_1}{I_1 - \beta t} \right)^{\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)} \quad (4)$$

$$\omega_{t=0} = \omega_1, \omega_{t=t_p} = \omega_2 = \omega_1 \left(\frac{I_1}{I_2} \right)^{\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)}.$$

Функция (4) определена и возрастает на интервале времени $0 \leq t \leq t_p$, а кривая (4) имеет вертикальную асимптоту $t = \frac{I_1}{\beta}$. Определим производную по времени от выражения (3):

$$\dot{\omega} = \frac{\omega_1 I_1^{(1-\frac{\alpha}{\beta})} (-\beta)}{(I_1 - \beta t)^2 (\frac{\alpha}{\beta} - 1)} \left(\frac{I_1}{I_2}\right)^{(\frac{\alpha}{\beta}-1)} \quad (5)$$

Так как производная (5) положительная величина и возрастает на интервале $0 \leq t \leq t_p$, то кривая (3) - вогнутая на этом интервале времени (Рис. 2).

2. При $\frac{\alpha}{\beta} = 1$, кривая (3) примет вид $\omega = \omega_1 = \text{const}$.

3. Если $\frac{\alpha}{\beta} > 1$, тогда (3) примет вид: $\omega = \omega_1 = \left(\frac{I_1 - \beta t}{I_1}\right)^{(\frac{\alpha}{\beta}-1)}$ (6)

Функция (6) определена и убывает на интервале времени $0 \leq t \leq t_p$. Определим первую производную по времени от функции (6):

$$\dot{\omega} = \omega_1 \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) \left(\frac{I_1 - \beta t}{I_1}\right)^{(\frac{\alpha}{\beta}-2)} (-\beta). \quad (7)$$

В связи с видом функции (7) целесообразно рассмотреть еще три случая: $1 < \frac{\alpha}{\beta} < 2$; $\frac{\alpha}{\beta} = 2$; $\frac{\alpha}{\beta} > 2$.

Установим, что будет с $\omega(t)$ при $I = I_2 = \text{const}$ и $t > t_p$.

Решая дифференциальное уравнение вращения фигуриста, получим для этого случая:

$$\omega = \omega_2 e^{-\frac{\alpha}{\beta} t}. \quad (8)$$

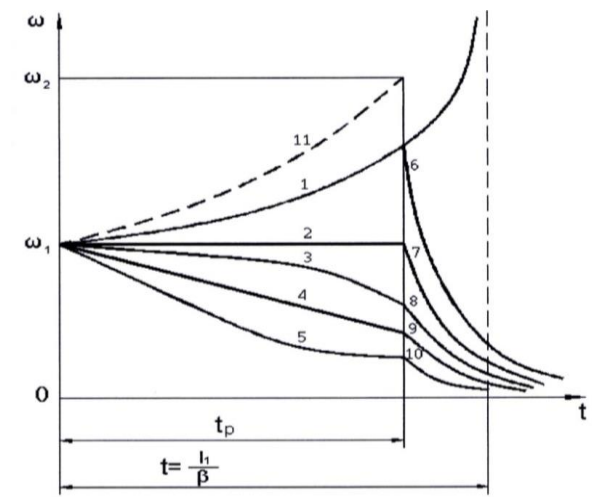


Рис. 2. Зависимость угловой скорости вращения при вязком трении:

$1 - \frac{\alpha}{\beta} < 1$; $2 - \frac{\alpha}{\beta} = 1$; $3 - \frac{\alpha}{\beta} > 1$; $4 - \frac{\alpha}{\beta} = 2$; $5 - \frac{\alpha}{\beta} > 2$; 6-10 – экспоненты

$\omega = \omega_1 e^{-\frac{\alpha}{I_2} t}$; 11 – гипербола $\omega = \omega_1 \frac{I_1}{I_1 - \beta t}$

Зависимость $\omega = \omega(t)$ в тривиальном случае имеет вид:

$$\omega = \omega_1 \frac{I_1}{I_1 - \beta t}. \quad (9)$$

Графиком функции (9) является гипербола (рис. 2) на интервале времени $0 \leq t \leq t_p$ (штриховая линия). Сравнивая графики (4) и (9), приходим к выводу о большем значении ординаты (9) по сравнению с ординатой (4).

Дифференциальное уравнение при одновременном действии сухого и вязкого трения имеет вид:

$$(I_1 - \beta t) \frac{d\omega}{dt} - \omega(\alpha - \beta) = -M_{\text{тр}}. \quad (10)$$

Решение уравнения (10) имеет вид:

$$\omega = \omega^* + \omega^{**}, \quad (11)$$

где ω^* - частное решение уравнения (10)

$$\omega^* = -\frac{M_{\text{тр}}}{\alpha - \beta};$$

ω^{**} - общее решение однородного уравнения

$$\omega^{**} = C I_1^{\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)} (I_1 - \beta t)^{\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right)}. \quad (12)$$

Произвольная постоянная $C = \omega_1 + \frac{M_{\text{тр}}}{\alpha - \beta}$

Тогда общее решение уравнения (10)

$$\omega = I_1^{\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)} (I_1 - \beta t)^{\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right)} \left(\omega_1 + \frac{M_{\text{тр}}}{\alpha - \beta} \right) - \frac{M_{\text{тр}}}{\alpha - \beta} \quad (13)$$

Решение (7) справедливо только для случаев и $\frac{\alpha}{\beta} < 1$ и $\frac{\alpha}{\beta} > 1$.

Для случая, когда $\alpha = \beta$

$$\omega = \omega_1 + \frac{M_{\text{тр}}}{\beta} \ln \frac{I_1 - \beta t}{I_1}. \quad (14)$$

На Рис.3 представлены графики функций (13) и (14) соответственно для случаев $\frac{\alpha}{\beta} < 1$ и $\frac{\alpha}{\beta} > 1$ и $\alpha = \beta$.

Установим, что будет с ω при $I = I_2 = \text{const}$ ($t > t_p$) для случая $\omega_1 = \frac{M_{\text{тр}}}{\beta - \alpha}$:

$$\omega = e^{-\frac{\alpha}{I_2} \left(\frac{M_{\text{тр}}}{\alpha} + \omega_2 \right)} - \frac{M_{\text{тр}}}{\alpha}. \quad (15)$$

Кривая (13) имеет горизонтальную асимптоту $\omega = -\frac{M_{\text{тр}}}{\alpha}$.

Определим время торможения t_T при $\omega = 0$

$$t_T = \frac{I_2}{\alpha} \ln \frac{\frac{M_{\text{тр}}}{\alpha} + \omega_2}{\frac{M_{\text{тр}}}{\alpha}}. \quad (16)$$

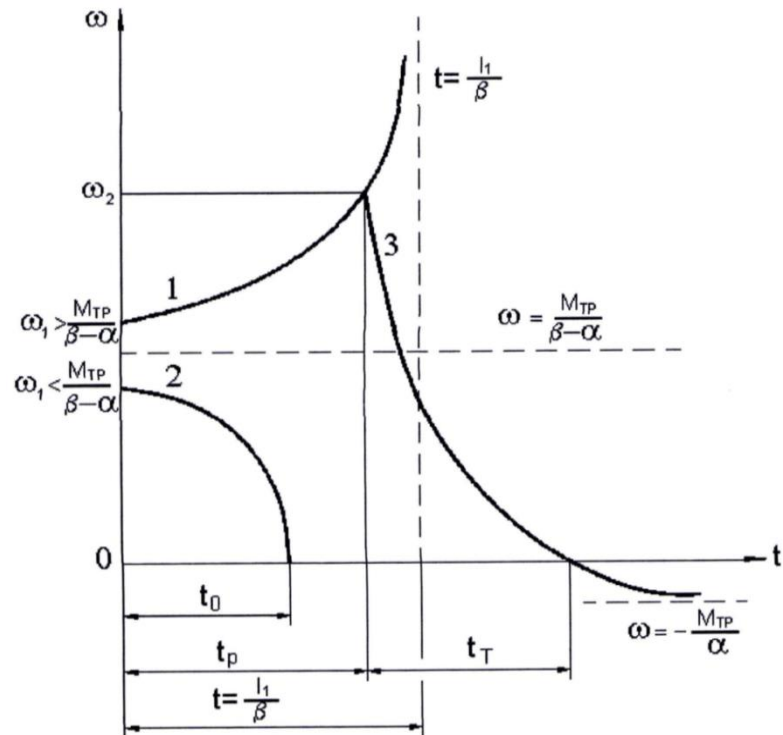


Рис. 3. Зависимость угловой скорости вращения фигуриста при вязком и сухом трении: 1 - $\omega_1 > \frac{M_{тр}}{\alpha - \beta}$; 2 - $\omega_1 < \frac{M_{тр}}{\alpha - \beta}$; 3 - $\omega = e^{-\frac{\alpha}{I_2} \left(\frac{M_{тр}}{\alpha} + \omega_2 \right) t} - \frac{M_{тр}}{\alpha}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бесекерский, В.А. Теория систем автоматического регулирования / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. – М.: Наука, 1975. – 768 с.
2. Меркин, Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения / Д.Р. Меркин. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
3. Мишин, А.И. Биомеханика движений фигуриста / А.И. Мишин. – М.: Физкультура и спорт, 1981.
4. Пановко, Я.Г. Основы прикладной теории упругих колебаний / Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1967. – 316 с.