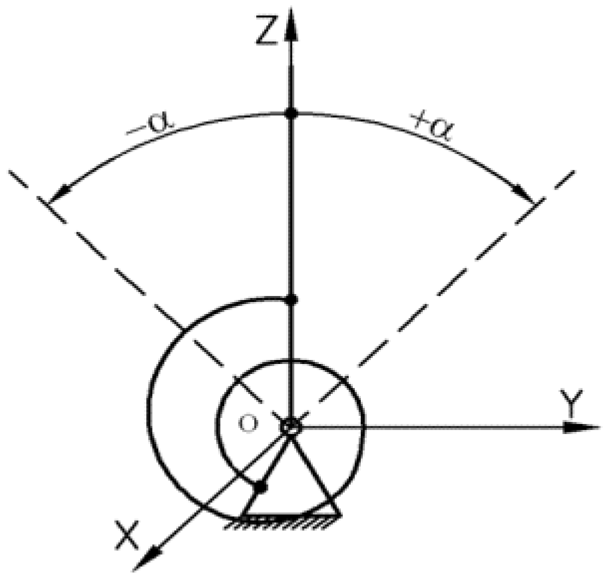
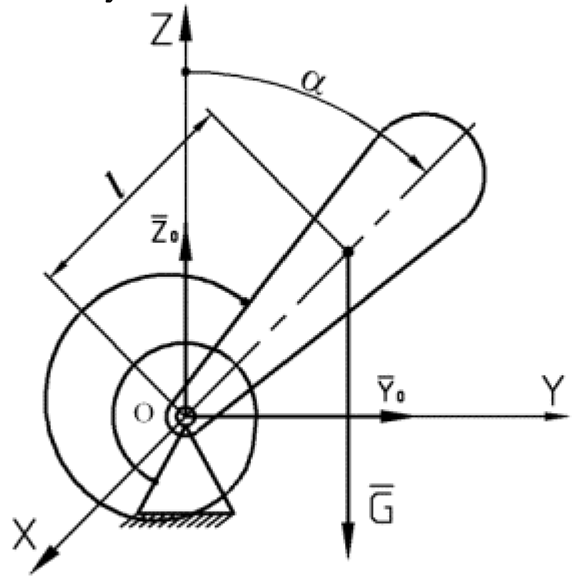
Бобылёв А.С. Ващенок Ю.В. Гурвич Ю.А.
Белорусский национальный технический университет, Минск

УСТОЙЧИВОТЬ ПОДПРУЖИНЕННОГО ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА МЕТОДАМИ ЛЯПУНОВА



В отличие от существующих подходов определения устойчивости подпружиненного физического маятника, в данной работе анализ устойчивости маятника выполнен методами А.М. Ляпунова, что может оказаться полезным студентам, изучающим различные курсы, в которые входят разделы, связанные с анализом устойчивости различных систем. Постановка задачи. Положение равновесия физического маятника, в котором его центр масс находится над опорой неустойчиво. Для стабилизации этого положения между телом и опорой помещена спиральная пружина, создающая восстанавливающий момент **M**, пропорциональный углу наклона маятника $\boldsymbol{\alpha}$ и равный $\mathbf{M} = \mathbf{c}\boldsymbol{\alpha}$, где **c** - жесткость пружины. Выполнить анализ устойчивости маятника методами А.М. Ляпунова.



Рассмотрим физический маятник с осью привеса, совпадающей с осью вращения X, перпендикулярной плоскости чертежа и проходящей через точку O. Положение маятника будем определять углом $\boldsymbol{\alpha}$, отсчитываемого от вертикальной оси Z. Расстояние от оси привеса до центра масс маятника обозначим через l. На маятник, отклоненный от вертикального положения, действуют силы: **G, Y_0, Z_0** и момент упругости пружины **M**. Трением в цилиндрическом шарнире пренебрегаем.

Определим кинетическую энергию маятника: $T = J_x \frac{\dot{\alpha}^2}{2}$, где J_x – момент инерции маятника относительно оси OX.

Для определения потенциальной энергии консервативных сил, приложенных к маятнику, рассмотрим три его положения:

– первое положение - вертикальное $\alpha_1=0$, которое соответствует недеформированной спиральной пружине;

– второе и третье положения - $\pm\alpha$, соответствуют деформированной пружине.

Определим потенциальную энергию восстанавливающей силы спиральной пружины $П_1$, $П_2$, $П_3$ в трех положениях маятника при $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = +\alpha$, $\alpha_3 = -\alpha$.

$$\underset{1\to2}{A} = \frac{c\alpha_1^2}{2} - \frac{c\alpha_2^2}{2} = -\int_{П_1}^{П_2} dП = П_1 - П_2,$$

$$\underset{1\to3}{A} = \frac{c\alpha_1^2}{2} - \frac{c\alpha_3^2}{2} = -\int_{П_1}^{П_3} dП = П_1 - П_3,$$

$$\underset{1\to2}{A} = \underset{1\to3}{A} = -П_2 = -П_3 = \frac{c\alpha^2}{2},$$

где $\underset{1\to2}{A}$, $\underset{1\to3}{A}$ - работа восстанавливающей силы пружины при перемещении ее конца вместе с маятником, соответственно, из положения 1 в положение 2 и из 1 в 3; $П_1 = 0$.

Потенциальная энергия сил, приложенных к маятнику, равна:

$$П = -\int_0^{\alpha} (mgl\sin\alpha - c\alpha)d\alpha = mgl\cos\alpha - mgl + \frac{c\alpha^2}{2}.$$

Полная энергия системы:

$$E = T + П = J_x \frac{\dot{\alpha}^2}{2} + mgl\cos\alpha - mgl + \frac{c\alpha^2}{2}.$$

Используя уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial \alpha} = -\frac{\partial П}{\partial \alpha},$$

составим дифференциальное уравнение движения маятника:

$$J_x\ddot{\alpha} = mgl\sin\alpha - c\alpha$$

. (1)

Приведем уравнение (1) к двум дифференциальным уравнениям первого порядка. Обозначим через вещественные переменные $y_i\ (i=1,2)$ параметры, характеризующие состояние физического маятника $\alpha = y_1$, $\dot{\alpha} = y_2$.

$$\dot{y}_1 = y_2,$$
$$\dot{y}_2 = \frac{mgl}{Jx}\sin y_1 - \frac{c}{Jx}y_1$$

. (2)

Тогда выражения (2) являются исходными уравнениями.

Одно из состояний равновесия физического маятника, расположенного вертикально при недеформированной пружине, характеризуются следующими значениями вещественных переменных $y_1 = 0, y_2 = 0$. Поэтому уравнения возмущенного движения совпадают с исходными.

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = \frac{mgl}{Jx}\sin x_1 - \frac{c}{Jx}x_1$$

. (3)

Первый метод Ляпунова [1-3]. Разлагая в ряд Маклорена правые части уравнений возмущенного движения (3) по степеням x_1, x_2 и ограничиваясь членами первого порядка
малости, получим уравнения первого приближения:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = \frac{mgl}{Jx}x_1 - \frac{c}{Jx}x_1$$

. (4)

Запишем уравнения первого приближения в матричной форме:

$$\dot{x} = [A]\cdot x \text{ или } \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = [A]\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}, \quad (5)$$

где $$[A]=\begin{bmatrix}0 & 1\\ \dfrac{mgl-c}{Jx} & 0\end{bmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение, соответствующее системе (5):

$$\det([A]-\lambda[K])=\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ \dfrac{mgl-c}{Jx} & -\lambda\end{vmatrix}=0,$$

где [K] - единичная матрица.

Характеристическое уравнение имеет вид: $\lambda^2+\dfrac{c-mgl}{Jx}=0$. Характер корней характеристического уравнения зависит от знака свободного члена:

- Если $c>mgl$, то этот знак положительный и корни характеристического полинома чисто мнимые $\lambda_{1,2}=\pm i\sqrt{\dfrac{c-mgl}{Jx}}$. В соответствии с теоремой первого метода Ляпунова этот случай относится к критическому, т.к. вещественная часть корней равняется нулю (Re λ_1 = Re λ_2 = 0). Этот случай должен быть исследован дополнительно вторым методом Ляпунова.
- Если $c<mgl$, то свободный член отрицателен. Корни характеристического полинома вещественные и разных знаков. Они определяются по формуле $\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{\dfrac{c-mgl}{Jx}}$.
- В соответствии с теоремой первого метода Ляпунова, при положительном значении одного из корней характеристического полинома, состояние равновесия неустойчиво независимо от нелинейных членов уравнения движения