Лысанович П.В., Ярохович А.И., Гурвич Ю.А.
Белорусский Национальный Технический Университет

Закономерности вращения фигуриста при вязком трении между коньком и льдом

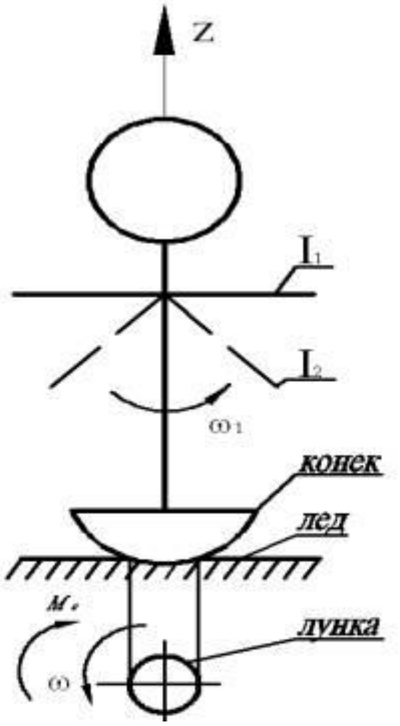

Рис.1

Определим угловую скорость вращения фигуриста относительно оси Z (рис.1) в функции времени $\omega = \omega(t)$ при условии, что момент инерции фигуриста относительно оси Z является переменным (функции времени) с учетом суммарного момента сопротивления воздуха вращающемуся фигуристу и его конька о лед, пропорционального угловой скорости вращения фигуриста $M_C = \alpha\omega$ (α - коэффициент пропорциональности).

Используя теорему об изменении кинетического момента фигуриста относительно оси Z, получим $\frac{dI}{dt}\omega + I\frac{d\omega}{dt} = -\alpha\omega$, где $I = I(t)$ - момент инерции фигуриста относительно оси Z в функции времени t. Решая это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, получим:

$$\omega = \omega_1 \frac{I_1}{I(t)} e^{-\alpha\int_0^{\tau}\frac{dt}{I(t)}} \qquad (1)$$

Зададим вид функции $I(t)$. Предварительно примем, что: время вращения фигуриста равно сумме времени разгона и торможения $t = t_{\text{р}} + t_{\text{Т}}$; $I(t)$ изменяется по линейному закону:

$$I = I_1 - \beta t, \text{ где } \beta = \frac{I_1 - I_2}{t_{\text{р}}}. \qquad (2)$$

Тогда $I_{t=0} = I_1, \quad I_{t=t_p} = I_2$.

Теперь решение (1) с учетом (2) имеет вид:

$$\omega = \omega_1 I_1^{(1-\alpha/\beta)} \left(I_1 - \beta t\right)^{(\alpha/\beta - 1)} . \qquad (3)$$

Рассмотрим 3 случая: $\alpha/\beta < 1,\ \alpha/\beta = 1,\ \alpha/\beta > 1$ и построим графики для (3).

1. Если $\alpha/\beta < 1$ (рис.2), тогда (3) примет вид:

$$\omega = \omega_1 \left(\frac{I_1}{(I_1 - \beta t)} \right)^{(1-\alpha/\beta)}, \qquad \omega_{t=0} = \omega_1,\ \omega_{t=t_2} = \omega_2 = \omega_1 \left(\frac{I_1}{I_2} \right)^{(1-\alpha/\beta)} . \qquad (4)$$

Функция (4) определена и возрастает на интервале времени $0 < t < tp$, а кривая (4) имеет вертикальную асимптоту $t = \frac{I_1}{\beta}$. Определим производную по времени от (3) для выявления характера построения графиков:

$$\omega = \frac{-\omega_1 I_1^{(1-\alpha/\beta)} (-\beta)}{(I_1 - \beta_t)^{2(1-\alpha/\beta)}} \left(\frac{I_1}{I_2}\right)^{(1-\alpha/\beta)} . \qquad (5)$$

Так как производная (5) положительная величина и возрастает на интервале $0 < t < tp$, то кривая (3) - вогнутая на этом интервале времени.

2.При $\alpha/\beta = 1$ кривая (3) примет вид:

$$\omega = \omega_1 = \text{const} \qquad (6)$$

при любом t> взятом из интервала времени $0 \le t \le tp$.

3. Если $\alpha/\beta > 1$, тогда (3) примет вид:

$$\omega = \omega_1 \left(\frac{I_1 - \beta t}{I_1}\right)^{(\alpha/\beta - 1)} . \qquad (7)$$

Функция (7) определена и убывает на интервале времени $0 \le t \le tp$. Определим первую производную по времени от функции (7):

$$\omega = \omega_1 (\alpha/\beta - 1) \left(\frac{I_1 - \beta t}{I_1}\right)^{(\alpha/\beta - 2)} (-\beta) . \qquad (8)$$

В связи с видом функции (8) целесообразно рассмотреть еще три случая.

3.1.Если $1 < \alpha/\beta < 2$» то производная (8) примет вид:

$$\omega = \omega_1(\alpha/\beta - 1)\left(\frac{I_1}{I_1 - \beta t}\right)^{(2-\alpha/\beta)}(-\beta) \qquad (9)$$

Производная (9) - отрицательная величина и убывает на интервале времени $0 \leq t \leq tp$. Следовательно, кривая (7) в этом случае - выпуклая и убывает на этом интервале времени.

3.2. При α / β = 2 производная (8) - отрицательная и постоянная величина. Следовательно, графиком функции (7) является отрезок прямой на интервале

$0 \leq t \leq tp$.

3.3 При α/ β > 2 производная (8) на интервале времени $0 \leq t \leq tp$ - отрицательная величина и возрастает. Следовательно, график (7) убывает и имеет вогнутость на этом интервале времени.

Интересно знать, что будет с ω(t) при $I_1 = I_2 = const$ и t>tp? Дифференциальное уравнение вращения фигуриста в этом случае имеет вид:

$$\frac{d(I_2\omega)}{dt} = -\alpha\omega \qquad (10)$$

Решая (10), получим $\omega = \omega_2 e^{-\frac{\alpha}{I_2}t}$.

Необходимо установить вид зависимости ω=ω(t) в тривиальном случае, когда фигурист из положения с I_1 переходит в положение I_2 (при этом Mc=0).

Для этого случая имеем:

$$\frac{dI}{dt}\omega + I\frac{d\omega}{dt} = 0 \qquad (11)$$

Решая (11) получим:

$$\omega = \omega_1\frac{I_1}{I} \qquad (12)$$

Если в (12) подставить I=I(t)=I_1 -βt, то получим:

$$\omega = \omega_1\frac{I_1}{I_1 - \beta t} \qquad (13)$$

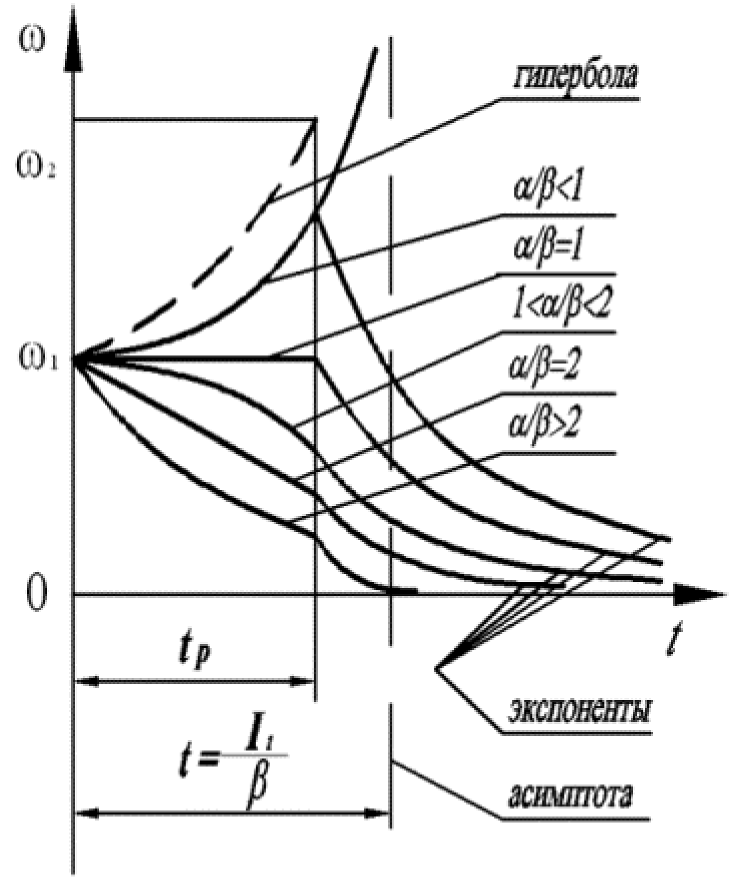

Рис.1

Графиком функции (13) является гипербола на интервале времени $0 \le t \le tp$ (штриховая линия). Сравнивая графики (4) и (13), приходим к выводу о большем значении ординаты (13) по сравнению с ординатой (4).