

Лысанович П.В., Ярохович А.И., Гурвич Ю.А.

Белорусский Национальный Технический Университет

Закономерности вращения фигуриста при одновременном действии вязкого и сухого трения между его коньком и льдом

В случае одновременного действия вязкого и сухого трения дифференциальное уравнение имеет вид:

$$I \frac{d\omega}{dt} + \alpha \left(\frac{dI}{dt} + \alpha \right) = -M_{mp}, \quad (1)$$

где $I = I_1 - \beta t$, тогда

$$(I_1 - \beta t) \frac{d\omega}{dt} + \alpha(\alpha - \beta) = -M_{mp}. \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) имеют решение:

$$\omega = \omega^* + \omega^{**}, \quad (3)$$

где ω^* - частное решение уравнения (2); ω^{**} - общее решение однородного уравнения, которое, как известно из (1), имеет вид:

$$\omega^{**} = C I_1^{(1-\alpha/\beta)} (I_1 - \beta t)^{(\alpha/\beta-1)}; \quad (4)$$

C - произвольная постоянная.

Частное решение будем искать в виде $\omega^* = \text{const}$. Тогда $\dot{\omega}^* = 0$.

Подставим ω^* и $\dot{\omega}^*$ в (2), получим:

$$\omega^* = \frac{M_{mp}}{\alpha - \beta}. \quad (5)$$

Найдем C , используя (3) и (4) при начальных условиях $\omega_{t=0} = \omega_1$.

$$\text{Тогда } C = \omega_1 + \frac{M_{mp}}{\alpha - \beta}.$$

Общее решение уравнения (1) получает вид:

$$\omega = I_1^{(1-\alpha/\beta)} (I_1 - \beta t)^{(\alpha/\beta-1)} \left(\omega_1 + \frac{M_{mp}}{\alpha - \beta} \right) + \frac{M_{mp}}{\alpha - \beta}. \quad (7)$$

Отметим, что решение (7) справедливо только для случаев $\alpha/\beta < 1$ и $\alpha/\beta > 1$.

Рассмотрим случай, когда $\alpha = \beta$, тогда (2) принимает вид:

$$(I_1 - \beta t) \frac{d\omega}{dt} = -M_{mp}. \quad (8)$$

Отсюда

$$\omega = \omega_1 + \frac{M_{mp}}{\alpha - \beta} * \frac{\ln \frac{I_1 - \beta t}{I_1}}{I_1}. \quad (9)$$

Построим график функций (7) и (9) соответственно для случаев $\alpha/\beta < 1, \alpha/\beta > 1$ и $\alpha = \beta$. Если $\alpha/\beta < 1$ (рис. 1), тогда (7) примет вид:

$$\omega = \left(\frac{I_1}{I_1 - \beta}\right)^{(1-\alpha/\beta)} \left(\alpha_1 - \frac{M_{mp}}{\beta - \alpha}\right) + \frac{M_{mp}}{\beta - \alpha} \quad (10)$$

$$\omega_{t=0} = \omega_1 \quad \omega_{t=t_p} = \omega_2 = (I_1/I_2)^{(1-\alpha/\beta)} \times \left(\alpha_1 - \frac{M_{mp}}{\beta - \alpha}\right) + \frac{M_{mp}}{\beta - \alpha}$$

Функция (10) определена на интервале времени $0 \leq t \leq t_p$, а кривая $\omega = \omega(t)$ имеет две асимптоты: горизонтальную $\omega = \frac{M_{\delta\delta}}{\beta - \alpha}$ и вертикальную $t = I_1/\beta$.

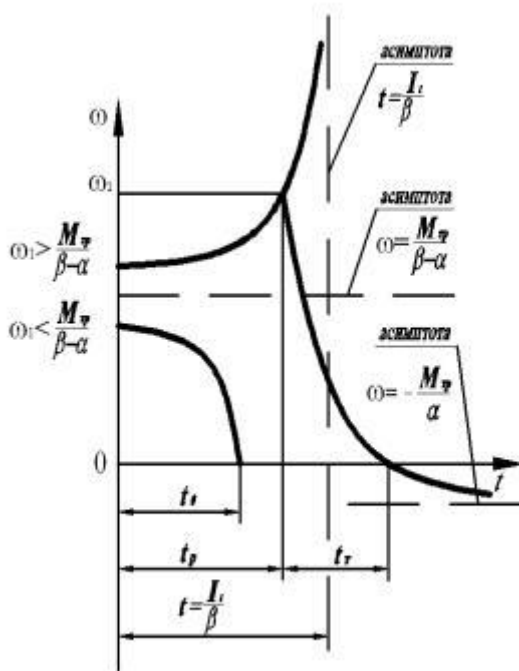


Рис.1

Определим t_0 , когда $\omega=0$,

$$t_0 = \frac{I_1}{\beta} - \frac{I_1}{\beta} \left(1 - \frac{\alpha_1(\beta - \alpha)}{M_{mp}}\right) \quad (12)$$

Интересно знать, что будет с ω при $I = I_2 = \cos \mu(t > t_p)$ для

случая $\alpha_1 > \frac{M_{mp}}{\beta - \alpha}$ (наиболее интересный и важный для зрителей и судей случай)? При этом $\omega(t)$ имеет вид:

$$\omega = e^{-\frac{\sigma}{I_1}t} \left(\frac{M_{TP}}{\alpha} + \omega_2\right) - \frac{M_{TP}}{\alpha} \quad \omega_{t=0} = \omega_2 \quad (13)$$

Кривая (13) имеет горизонтальную асимптоту $\omega = -\frac{M_{TP}}{\alpha}$.

Определим время торможения t_r при $\omega = 0$. При этом

Если $\omega_1 > \frac{M_{\delta\delta}}{\beta - \alpha}$, функция (10) возрастает, в противном случае - убывает. Определим ω , для решения вопроса о характере графика функции (10).

$$\omega = \frac{-I_1^{(1-\alpha/\beta)} \left(\alpha_1 - \frac{M_{\delta\delta}}{\beta - \alpha}\right) (-\beta)}{(I_1 - \beta)^{2(1-\alpha/\beta)}} \quad (11)$$

Если $\left(\alpha_1 - \frac{M_{mp}}{\beta - \alpha}\right) > 0$, то ω возрастает, тогда кривая (10) – вогнутая, если - наоборот, то кривая (10) - выпуклая.

$$t_T = \frac{I_2}{\alpha} \ln \frac{\frac{M_{TP} + \alpha_2}{\alpha}}{\frac{M_{TP}}{\alpha}} \quad (14)$$

Рассмотрим случай $1 < \alpha/\beta < 2$ (рис.2). Тогда (7) приобретает вид:

$$\omega = \left(\frac{I_1 - \beta}{I_1} \right)^{(1-\alpha/\beta)} \left(\omega_1 + \frac{M_{TP}}{\alpha - \beta} \right) - \frac{M_{TP}}{\alpha - \beta} \quad (15)$$

Функция (15) определена на интервале времени $0 \leq t \leq t_p$. Производная $\dot{\omega}$ на интервале $0 \leq t \leq t_p$ - отрицательная и убывает, поэтому график (15) - выпуклый и убывает. Если $\alpha/\beta > 2$, то $\dot{\omega}$ на интервале $0 \leq t \leq t_p$ отрицательна и возрастает.

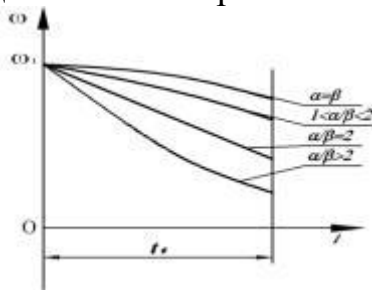


Рис.2

Поэтому кривая (15) на этом интервале имеет вогнутость и убывает.

При $\alpha/\beta = 2$ (рис. 2) график (15) - прямая линия (об этом также говорит значение $\dot{\omega} = const$).

В случае $\alpha = \beta$ (рис.2) производная по времени от (9) имеет вид $\dot{\omega} = \frac{M_{TP}}{\beta} - \frac{I_1(-\beta)}{I_1 - \beta}$ и на интервале $0 \leq t \leq t_p$ - отрицательно убывает. Поэтому график функции (9) убывает и является выпуклым.