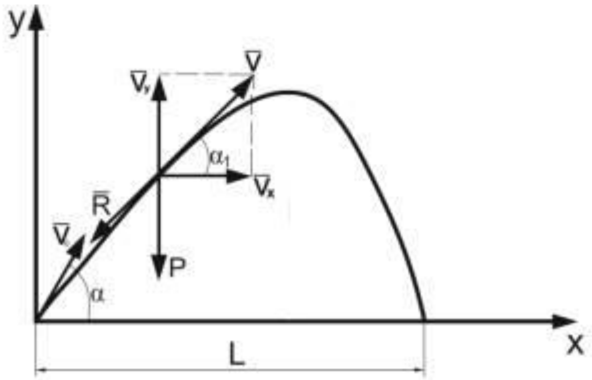
Корзун А.С., Крайник Д.А., Лысанович П.В., Горбач Н.И., Гурвич Ю.А.
Белорусский национальный технический университет, Минск

Расчёт дальности полета артиллерийского снаряда в декартовых осях координат

Рассмотрев движение снаряда весом P, которому сообщена начальная скорость v_0 под углом α к горизонту, с учетом силы сопротивления воздуха $\overline{R} = -kP\overline{V}$



Движение снаряда в декартовых осях XOY определяется уравнениями:

$$x = \frac{V_0 \cos(\alpha)}{kg}(1 - e^{-kgt}). \qquad (1)$$

$$y = \frac{1}{kg}\left(\frac{1}{k} + V_0 \sin(\alpha)\right)(1 - e^{-kgt}) - \frac{t}{k}. \qquad (2)$$

Дальность полета снаряда определяется по уравнению (1) при известном времени полета снаряда, которое можно определить из уравнения (2), получив $y = 0$. Однако решение полученного в результате этого тресцендентного уравнения аналитически невозможно.

Поэтому это уравнение было решено графически, представив его в виде двух уравнений : $y_1 = \frac{t}{k}$ и $y_2 = \frac{1}{kg}\left(\frac{1}{k} + V_0 \sin(\alpha)\right)(1 - e^{-kgt}).$ (3)

Кроме этого максимальная дальность полета снаряда будет иметь место при некотором угле . Значение этого угла можно определить, установив аналитическую зависимость дальности полета S до достижения максимальной высоты подъема снаряда. В этом случае проекция вектора скорости на ось y $V_y = 0$. Из этого условия определено время подъема на максимальную высоту и затем, подставив его в уравнение (1), получена формула

$$S = \frac{V_0^{\,2}\sin(2\alpha)}{2g(kV_0\sin(\alpha)+1)}. \tag{4}$$

При расчете на ЭВМ с использованием этой формулы при определено более точное значение $\alpha_{опт} = 31{,}5°$.

В работе значение угла α , при тех же данных, получено равным $34{,}2°$. Разницу этих значений можно объяснить тем, что при расчете допускались некоторые неточности в вычислениях из-за округлений. Затем при указанных выше значениях V_0, k и $\alpha_{опт}$ вычислены y_1 и y_2 по формулам (3) и построены графики $y_1(t)$ – линия 1, а $y_2(t)$ – линия 2 (рисунок 1).

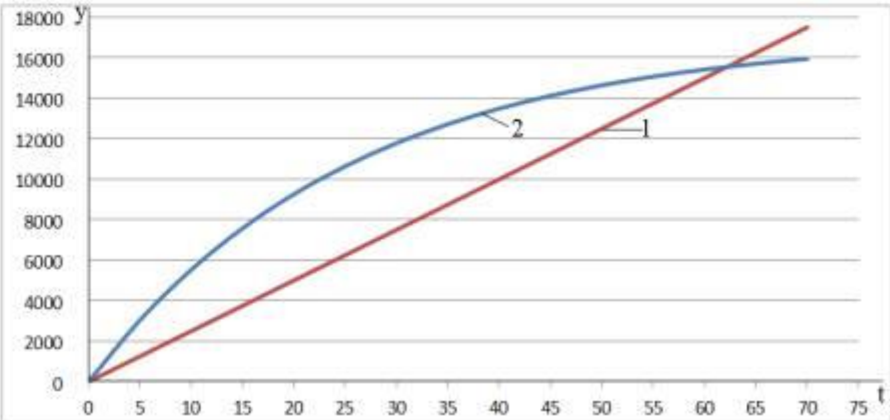


Рисунок 1

Точка пересечения этих линий определяет время при котором $y_1 = y_2$, а $y = y_2 - y_1 = 0$ т.е. время движения снаряда от момента выстрела до момента падения, оказалась равным .

Для определения дальности полета снаряда подставим в уравнение (1) полученные данные $\alpha_{опт} = 31{,}5°$ и $t_{пол} = 62{,}2$ с .

$= 15881{,}84$ м .

В задаче рассматривалось движение снаряда весом Р, которому сообщена начальная скорость v_0 под углом α к горизонту, с учетом силы сопротивления воздуха $\overline{R} = -kP\overline{V}$

Движение снаряда в декартовых осях XOY определяется уравнениями:

$$x = \frac{V_0\cos(\alpha)}{kg}\left(1 - e^{-kgt}\right). \tag{1}$$

$$y = \frac{1}{kg}\left(\frac{1}{k} + V_0\sin(\alpha)\right)\left(1 - e^{-kgt}\right) - \frac{t}{k}. \tag{2}$$

Исключив из этих уравнений время t, получим уравнение траектории в координатной форме

$$y = xtg(\alpha) + \frac{x}{kV_0\cos(\alpha)} + \frac{1}{k^2 g}\ln\left(1 - \frac{kgx}{V_0\cos(\alpha)}\right). \qquad (3)$$

Для сравнения полученного уравнения траектории с уравнением траектории полета снаряда в безвоздушном пространстве разложим выражение $\ln\left(1 - \frac{kgx}{V_0\cos(\alpha)}\right)$ в ряд Тейлора, затем первые шесть слагаемых ряда Тейлора подставим в уравнение (3). В итоге получим приближенное уравнение траектории снаряда:

$$y = xtg(\alpha) - \frac{gx^2}{2V_0^2\cos^2(\alpha)} - \frac{kg^2x^3}{3V_0^3\cos^3(\alpha)} - \frac{k^2g^3x^4}{4V_0^4\cos^4(\alpha)} - \frac{k^3g^4x^5}{5V_0^5\cos^5(\alpha)}$$

. (4)

Уравнение (4) можно представить в виде:

$$y = xtg(\alpha) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^{n-1}g^n x^{n+1}}{(n+1)V_0^{n+1}\cos^{n+1}(\alpha)}, \qquad (5)$$

что позволяет определять уравнение траектории при любом числе слагаемых ряда Тейлора.

Из уравнения (4) видим, что первые два слагаемых полностью совпадают с известным уравнением траектории полета снаряда в безвоздушном пространстве. Учитываются только четыре первых слагаемых ряда Тейлора, что позволило без двух последних слагаемых уравнения (4) при y=0 получить формулу для определения дальности L полета снаряда.

Как показали дальнейшие исследования и расчеты дальность полета снаряда, определенная по этой формуле весьма завышена и пользоваться этой формулой нельзя.

Более того, дальность полета не может быть равным или превышать значение $x = \frac{V_0\cos(\alpha)}{kg}$, так как $\ln 0$ или отрицательного числа не существует, что

при , и .

ЛИТЕРАТУРА:

1 К вопросу о движении артиллерийского снаряда / Амельянчик А.И., Горбач Н.И. // Международный научно-технический журнал / БНТУ. – Минск, 2009. – Выпуск 24: Теоретическая и прикладная механика. – С. 247–260.

2 Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. - М.: ООО «Издательство Астрель» АСТ, 2002. - 992 с: ил.

3 Яблонский, АА. Курс теоретической механики: учебник для техн. вузов / А.А. Яблонский. - 6-е изд. испр. - М.: Высш. шк., 1984-423 е.: ил.

4 Мещерский, И.В. Сборник задач по теоретической механике / И.В. Мещерский. - М.: «Наука», 1981. - 480 с.

5 Наставление по стрелковому делу. Воениздат, 1985, Москва, К-160, редактор В.М. Чайка.