Корзун А.С., Крайник Д.А., Гурвич Ю.А.
Белорусский Национальный Технический Университет

Анализ движения артиллерийского снаряда на ЭВМ по настильной траектории при сопротивлении воздуха

Данная задача относится к задачам внешней баллистики – науки, изучающей движение снаряда после его вылета из ствола орудия.

Для простоты модели артиллерийский снаряд будем рассматривать как материальную точку, брошенную под углом α к горизонту с начальной скоростью V_0. Рассмотрим движение снаряда весом Р, которому сообщена начальная скорость $\overline{V_0}$ под углом α к горизонту, с учётом силы сопротивления (рис. 1).

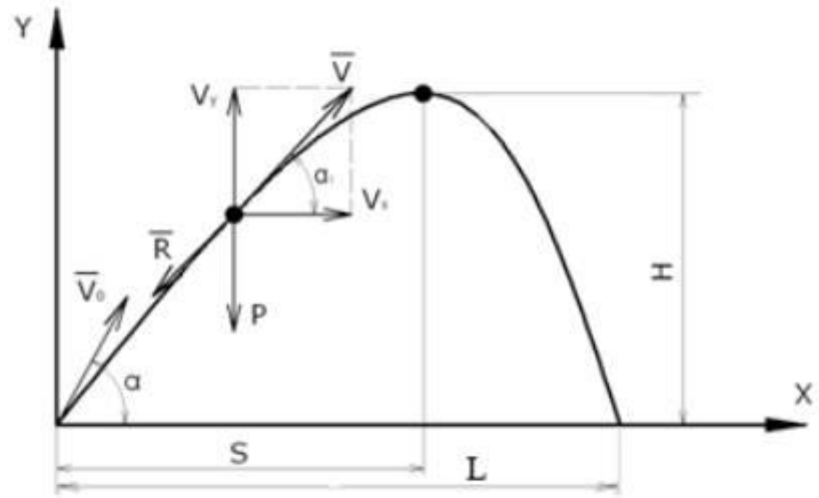

Рисунок 1.

Решим поставленную задачу о движении артиллерийского снаряда при сопротивлении воздуха пропорционального второй степени скорости движения на ЭВМ. Для этого воспользуемся методом Рунге-Кутта четвертого порядка, а программой реализации – Turbo Pascal 7.0.

Заменим в уравнениях (1) и (2) $V_x = \dot{x}(t)$ и $V_y = \dot{y}(t)$ и получим:

$$\ddot{x} = -kg\dot{x}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \tag{1}$$

$$\ddot{y} = -g\left(1 + k\dot{y}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\right). \tag{2}$$

Для того чтобы в программу подставить полученные уравнения (1) и (2) необходимо сначала их преобразовать, сделав из двух уравнений второго порядка четыре уравнения первого порядка.

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{y}}[1] = \square[2]$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{y}}[2] = -\mathbf{kg}\dot{\mathbf{x}}\sqrt{\dot{\mathbf{x}}^2 + \dot{y}^2}$$

$$\dot{y} = \dot{y}[3] = \square[4]$$
$$\ddot{y} = \dot{y}[4] = -g\left(1 + k\dot{y}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\right)$$

Преобразовав, получим четыре уравнения первого порядка (3):

$$\dot{y}[1] = y[2]$$
$$\dot{y}[2] = -kgy[2]\sqrt{y[2]^2 + y[4]^2}$$
$$\dot{y}[3] = y[4]$$
$$\dot{y}[4] = -g\left(1 + ky[4]\sqrt{y[2]^2 + y[4]^2}\right)$$

Но для решения на ЭВМ необходимо совсем избавиться от степени, для этого создадим таблицу (таблица 1), в которой произведем все нужные замены для программы, после которых программа сможет решить систему уравнений (1) и (2).

Таблица 1

Массив производных	Массив функции
$\dot{x} = F[1]$	$x = y[1]$
$\ddot{x} = F[2]$	$\dot{x} = y[2]$
$\dot{y} = F[3]$	$y = y[3]$
$\ddot{y} = F[4]$	$\dot{y} = y[4]$

Преобразуем уравнения (1) и (2) для программы используя таблицу 1, полученную систему уравнений подставим в процедуру DIF.
Получим окончательную преобразованную систему формул (4):

$$F[1] = y[2]$$
$$F[2] = -kgy[2]\sqrt{y[2]^2 + y[4]^2}$$
$$F[3] = y[4]$$
$$F[4] = -g\left(1 + ky[2]\sqrt{y[2]^2 + y[4]^2}\right)$$

Проанализировав системы уравнений (3) и (4), можно заметить, что изменилась только левая часть уравнения. То есть, для более простого и быстрого преобразования можно было заменить только левые части уравнений. Примем коэффициент сопротивления воздуха $\mathbf{k} = 0,00002$.

Программа реализация в интегрированной среде Turbo Pascal 7.0

```
Program DU;
uses crt;
const
k=0.00002;
g=9.81;
p=0.05;
ci=0.001;
type mas=array[1..15] of real;
var y,v:mas;
Var tn,tp,al0g,al0r,H,V0:real;
tt,ttt:text;
Procedure Fun(t:real;Var V:Mas);
begin
v[1]:=z[2];
v[2]:=-g*k*z[2]*sqrt (sqr(z[2])+sqr(z[4]));
v[3]:=z[4];
v[4]:=-g*(1+k*z[4]*sqrt (sqr(z[2])+sqr(z[4])));
end;
{$I RK4.pas}
begin
clrscr;
assign(tt,'x.txt');
assign(ttt,'y.txt');
rewrite(tt); rewrite(ttt);
al0g:=5;
write('V0='); readln(V0);
write('H='); readln(H);
while al0g<=85 do
begin
writeln;
writeln(al0g:3:0);
writeln;
writeln(tt);
writeln(tt,al0g:3:0);
```

```
writeln(tt);
writeln(ttt);
writeln(ttt,al0g:3:0);
writeln(ttt);
al0r:=(pi*al0g)/180;
z[1]:=0;
z[2]:=V0*cos(al0r);
z[3]:=0;
z[4]:=V0*sin(al0r);
tn:=0; tp:=p;
repeat
RK4(4,tn,tp,ci,y,v);
writeln(tp:10:3,' ',y[1]:10:3,' ',y[3]:10:3);
writeln(tt,y[1]:10:3);
writeln(ttt,y[3]:10:3);
tn:=tp; tp:=tp+p;
until(y[3]<=0);
al0g:=al0g+H;
end;
readln;
close(tt); close(ttt);
end.
```

Вывод:

Разработан программных продукт в интегрированной среде Turbo Pascal 7.0, предназначенный для численного решения дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта, что позволило определить точное время и дальность полета снаряда с учетом сопротивления воздуха пропорционально второй степени скорости движения.